תרגול 7:

הגדרה: תהי γ מסילה סגורה, ותהי $z_0\in\mathbb{C}$ נקודה לא על γ. האינדקס של γ ביחס לנקודה z_0, $Ind_\gamma\left(z_0\right)$ מוגדר כמספר הפעמים ש-γ מקיפה את z_0 נגד כיוון השעון. [לצייר דוגמאות]

נוסחת קושי – תהי $f\left(z\right)$ אנליטית בעיגול (פתוח) Δ, ותהי γ מסילה סגורה ב-Δ. אזי לכל נקודה $z_0\notin\gamma$ $\;Ind_\gamma\left(z_0\right)f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz$. מקרה פרטי חשוב הוא כאשר המסילה מקיפה רק פעם אחת.

תרגיל ממבחן:

6. א. תהיינה $a,b\in\mathbb{C}$ נקודות שונות. חשב $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{dz}{\left(z-a\right)\left(z-b\right)}$ עבור האפשרויות הבאות:

[לצייר 1 2 3]

פתרון: ע"י פירוק לשברים חלקיים מקבלים $\frac{1}{\left(z-a\right)\left(z-b\right)}=\frac{1}{a-b}\frac{1}{z-a}-\frac{1}{a-b}\frac{1}{z-b}$ כך שמקבלים $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{dz}{\left(z-a\right)\left(z-b\right)}=\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{dz}{z-a}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{dz}{z-b}\right]$. במקרה הראשון מקבלים אפס, בשני ובשלישי $\frac{2}{a-b}$.

נוסחת קושי לנגזרות – עם התנאים הקודמים, $Ind_\gamma\left(z_0\right)f^{(n)}\left(z_0\right)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_\gamma\frac{f\left(z\right)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}dz$

בד"כ נעסוק בעקומות המקיפות פעם אחת: $f^{(n)}\left(z_0\right)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_\gamma\frac{f\left(z\right)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}dz$

תרגיל ממבחן:

חשבו $\int\limits_{|z|=1}\frac{z+\bar{z}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}dz$. המסילה מכוונת נגד כיוון השעון.

פתרון: הפונקציה באינטגרל היא $\frac{z+1/z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{z^2+1}{z\left(z-1/2\right)^2}$ נשתמש בפירוק לשברים חלקיים

$$\frac{z^2+1}{z\left(z-1/2\right)^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1/2}+\frac{C}{\left(z-1/2\right)^2}$$

יוצא $A=4, B=-3, C=\frac{5}{2}$. כלומר

$$\int_{|z|=1}\frac{z+\bar{z}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}dz=4\int_{|z|=1}\frac{1}{z}dz-3\int_{|z|=1}\frac{dz}{z-\frac{1}{2}}+\frac{5}{2}\int_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$

את האינטגרלים מחשבים לפי נוסחת קושי. התשובה הסופית היא $2\pi i$.

תרגיל ממבחן: תהי $f(z)$ פונקציה שלמה, כך שלכל $z\in\mathbb{C}$ $f(z)=f(z+1)=f(z+i)$. הוכח ש-$f(z)$ פונקציה קבועה. רמז: עיין בחלוקה של המישור המרוכב $\mathbb{C}$ שיוצרים הישרים $\{\mathrm{Im}(z)=n:n\in\mathbb{Z}\},\{\mathrm{Re}(z)=n:n\in\mathbb{Z}\}$.

פתרון: f היא פונקציה "דו-מחזורית" וכל הערכים שהיא מקבלת טמונים באחד מהריבועים ברשת [ציור]. למשל בריבוע $D=\{x+iy:0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. $|f|$ רציפה ב- D ולכן חסומה שם. כלומר $\forall z\in D\left(|f(z)|\le M\right)$, ובגלל המחזוריות $\forall z\in\mathbb{C}\left(|f(z)|\le M\right)$. ליוביל אומר ש-f קבועה.

תרגיל ממבחן: נניח ש-$f(z)$ פונקציה שלימה ולא קבועה. הוכיחו כי הטווח $f(\mathbb{C})=\{f(z):z\in\mathbb{C}\}$ צפוף ב-$\mathbb{C}$.

פתרון: נניח בשלילה כי הטווח אינו צפוף. כלומר יש נקודה $w_0\in\mathbb{C}$ שהטווח $f(\mathbb{C})$ "לא מתקרב" אליה. כלומר קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל z, $|f(z)-w_0|>\varepsilon_0$ מכאן $\left|\frac{1}{f(z)-w_0}\right|<\frac{1}{\varepsilon_0}\equiv M$

הפונקציה $\frac{1}{f(z)-w_0}$ היא שלימה וחסומה, וליוביל אומר שקבועה. ע"י משחקים אלגבריים מקבלים שגם $f(z)$ קבועה – וזו סתירה!

תרגיל: (הכללה של משפט ליוביל)

תהי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שלמה המקיימת $|f(z)|\le K|z|^m$ עבור $K\ge 0, m\in\{0,1,2,\ldots\}$ הוכיחו כי $f(z)$ היא פולינום ממעלה $\ge n$.

פתרון: f שלמה ולכן $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ עבור $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. ע"פ נוסחת קושי,

$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-0)^{n+1}}dz}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$. נעריך את $|a_n|$ ע"י הערכות קושי

$$M=\max_{|z|=R}\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|=\max\frac{|f(z)|}{R^{n+1}}\le\max\frac{K|z|^m}{R^{n+1}}=\frac{K}{R^{n+1-m}}$$ כאשר $|a_n|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\right|\le\frac{1}{2\pi}ML$

$L=2\pi R$. כלומר $|a_n|\le\frac{1}{2\pi}\frac{K}{R^{n+1-m}}2\pi R=\frac{K}{R^{n-m}}$ אם $n>m$ מקבלים $|a_n|\le 0$ ע"י הגבול

$R\to\infty$. נשארים עם $f(z)=\sum_{n=1}^{m}a_n z^n$ פולינום כנדרש.

תרגיל ממבחן:

נניח ש-$f(z)$ פונקציה שלימה כך שלכל $z\in\mathbb{C}$ $|\sin f(z)|>1$. הוכיחו ש-$f(z)$ קבועה.

פתרון: $g(z)=\frac{1}{\sin f(z)}$ גם היא שלמה, והיא גם חסומה – ולכן קבועה (ליוביל) ומכאן $\sin f(z)=const$. למה זה מכריח $f(z)=const$? התנאי $\sin f(z)=const$ אומר שכל הערכים של f נמצאים בקבוצה בת מנייה A. נניח בשלילה ש-f לא קבועה. אזי היא מקבלת לפחות שני ערכים שונים, בנקודות שונות $f(z_1)\ne f(z_2)$. מרציפות f מקבלים סתירה, שכן ערכי הפונקציה חייבים לחרוג מהקבוצה A.