

## מתמטיקה בדידה (88195) – בחינת סיום (מועד ב') פרופ' סטוארט מרגוליס, פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.  
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. אם פתרם את כל השאלות – נא לציין 4 שאלות לבדיקה, אחרת תיבדקנה 4 הראשונות. כל השאלות שוות-משקל.  
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרונות. ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".

**בהצלחה!**

1. הראו, על ידי בחירת הפרדיקט  $Q$ , כי הפסוק הבא אינו בהכרח נכון:  
$$\forall x \exists y Q(x, y) \wedge \forall y \exists x Q(x, y) \rightarrow \forall x \exists y (Q(x, y) \wedge Q(y, x))$$

2. יהי  $\sim$  יחס על  $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$  המוגדר על ידי:  $(\forall a, b \in \mathbb{R}^*) : a \sim b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

- הוכיחו:  $\sim$  יחס שקילות.
- הוכיחו: כל מחלקת שקילות היא בת מנייה.
- הוכיחו: קיימת קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}^*$  המכילה איבר אחד בדיוק מכל מחלקת שקילות.

3. נגדיר על הקבוצה  $P = \{2, 3, 4\} \times \{1, 3, 5\}$  יחס  $\tilde{\leq}$  על ידי:  
$$(x_1, y_1) \tilde{\leq} (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \mid x_2 \wedge x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2)$$

- הוכיחו:  $(P, \tilde{\leq})$  קבוצה סדורה חלקית.
- ציירו דיאגרמת הסה של  $(P, \tilde{\leq})$ .
- כמה שרשראות בנות 5 איברים יש ב- $(P, \tilde{\leq})$ ?
- מצאו איברים מקסימליים, מינימליים, גדול ביותר, קטן ביותר (אם יש) ב- $(P, \tilde{\leq})$ .

4. תהיינה:  $X$  קבוצה;  $A, B$  תת-קבוצות של  $X$ , עם פונקציות אופייניות  $\chi_A, \chi_B$ .

- הוכיחו:  $\chi_A + \chi_B$  היא פונקציה אופיינית של תת-קבוצה של  $X$  אם ורק אם  $A \cap B = \emptyset$ .
- הוכיחו:  $(1 - \chi_A) \cdot \chi_B$  היא תמיד פונקציה אופיינית של תת-קבוצה של  $X$ . הביעו תת-קבוצה זו ישירות באמצעות  $A, B$ .

5. תהי  $A$  קבוצה כלשהי.

- הוכיחו:  $|A^A| \neq \aleph_0$ .
- תהי  $f \in A^A$  פונקציה כך ש- $f \circ f \circ f \circ f$  היא פונקציה הזהות על  $A$ . הוכיחו:  $f$  היא חח"ע ועל.