תרגול 13 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

ינואר 2016

1 העתקות לינאריות

תרגיל 1.1. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכיחו:

1. $\ker T\subseteq \ker T^2$.
2. $\mathrm{Im}T\supseteq \mathrm{Im}T^2$.

הוכחה.

1. יהי $v\in\ker T$. צ"ל: $v\in\ker T^2$. לפי הנתון, $T\left(v\right)=0$. לכן
$$T^2\left(v\right)=T\left(T\left(v\right)\right)=T\left(0\right)=0$$
ומכאן $v\in\ker T^2$, כדרוש.
2. יהי $v\in\mathrm{Im}T^2$. צ"ל $v\in\mathrm{Im}T$. לפי הנתון, קיים $w\in V$ שעבורו $T^2\left(w\right)=v$. נסמן $u=T\left(w\right)$; לכן
$$T\left(u\right)=T\left(T\left(w\right)\right)=T^2\left(w\right)=v$$
ולכן $u\in\mathrm{Im}T$, כדרוש.

□

תרגיל 1.2. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1. $\ker T=\ker T^2$.
2. $\mathrm{Im}T=\mathrm{Im}T^2$.
3. $V=\ker T\oplus\mathrm{Im}T$.

הוכחה. $\boxed{2\Leftrightarrow 1}$ לפי משפט הדרגה עבור T ועבור T^2,
$$\dim\ker T+\dim\mathrm{Im}T=\dim V=\dim\ker T^2+\dim\mathrm{Im}T^2$$
לכן $\dim\ker T=\dim\ker T^2$ אם ורק אם $\dim\mathrm{Im}T=\dim\mathrm{Im}T^2$.

כיוון ש-$\ker T\subseteq\ker T^2$, נקבל ש-$\ker T=\ker T^2$ אם ורק אם $\dim\ker T=\dim\ker T^2$. מאותה סיבה, $\mathrm{Im}T=\mathrm{Im}T^2$ אם ורק אם $\dim\mathrm{Im}T=\dim\mathrm{Im}T^2$. לכן קיבלנו ש-1 ו-2 שקולים.

$\boxed{1\Leftarrow 3}$ ראשית, נראה שהסכום ישר: יהי $v\in\ker T\cap\mathrm{Im}T$. לכן $T(v)=0$, וגם קיים $w\in V$ שעבורו $T(w)=v$. משילוב התנאים,

$$T^2(w)=T(T(w))=T(v)=0$$

לכן $w\in\ker T^2$. לפי הנתון, $w\in\ker T$, ולכן $v=T(w)=0$. כלומר $\ker T\cap\mathrm{Im}T=\{0\}$. לפי משפט הדרגה, $\dim\ker T+\dim\mathrm{Im}T=\dim V$. משילוב התנאים,

$$V=\ker T\oplus\mathrm{Im}T$$

כנדרש.

$\boxed{1\Rightarrow 3}$ יהי $v\in\ker T^2$. צ"ל $v\in\ker T$. נסמן $w=T(v)$. לכן $w\in\ker T\cap\mathrm{Im}T$, וכיוון שהסכום ישר נקבל $T(v)=w=0$. לכן $v\in\ker T$. $\square$

2 מטריצה מייצגת העתקה

הגדרה 2.1. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, יהי B בסיס (סדור) של V, ויהי C בסיס סדור של W. נסמן $n=\dim V$ ו-$m=\dim W$. **המטריצה המייצגת של T מהבסיס B לבסיס C** היא המטריצה היחידה $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$ המקיימת

$$\forall v\in V:[T(v)]_C=A\cdot[v]_B$$

מסמנים אותה $A=[T]_C^B$. אם $B=\{v_1,\dots,v_n\}$, היא נתונה על ידי הנוסחה

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

אם $B=C$, מקצרים ומסמנים $[T]_B=[T]_B^B$.

דוגמה 2.2. אם $I:V\to V$ העתקת הזהות, ואם B ו-C בסיסים של V, אזי המטריצה המייצגת של T מהבסיס B לבסיס C היא מטריצת המעבר ביניהם – $[I]_C^B$.

דוגמה 2.3. תהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$ ההעתקה המוגדרת לפי

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\begin{pmatrix}a-b+2c\\ c-a\end{pmatrix}$$

יהי $S_1=\{1,x,x^2\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$, ויהי $S_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. נחשב את $[T]_{S_2}^{S_1}$:

$$T(1)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad[T(1)]_{S_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$
$$T(x)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad[T(x)]_{S_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$
$$T\left(x^2\right)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\left[T\left(x^2\right)\right]_{S_2}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

משפט 2.4. תהיינה $T : V \to W$ ו-$S : W \to U$ העתקות ליניאריות, יהי B בסיס של V, יהי C בסיס של W ויהי D בסיס של U. אזי

$$[S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B$$

מסקנה 2.5. אם $T : V \to W$ היא איזומורפיזם, אזי $[T^{-1}]_B^C = \left([T]_C^B\right)^{-1}$.

מסקנה 2.6. יהיו B_1 ו-B_2 בסיסים של V, ויהיו C_1 ו-C_2 בסיסים של W. אזי

$$[T]_{C_2}^{B_2} = [I]_{C_2}^{C_1} [T]_{C_1}^{B_1} [I]_{B_1}^{B_2}$$

אלגוריתם 2.7 (אלגוריתם לחישוב המטריצה המייצגת את ההעתקה). תהי $T : V \to W$ העתקה ליניארית, יהי B בסיס של V, ויהי C בסיס של W.

1. לוקחים את הבסיס הסטנדרטי S של W, ומחשבים את $[I]_C^S$ (כפי שאנחנו יודעים לעשות).
2. מחשבים את $[T]_S^B$.
3. מחשבים את $[T]_C^B = [I]_C^S \cdot [T]_S^B$.

תרגיל 2.8. תהי $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ ההעתקה המוגדרת לפי

$$T\left(a + bx + cx^2\right) = \begin{pmatrix} a - b + 2c \\ c - a \end{pmatrix}$$

יהי $B = \{1 - x, 2 + x^2, 3 - x + x^2\}$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$, ויהי $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. חשבו את $[T]_C^B$.

פתרון. יהי $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. נחשב את $[I]_C^S$:

$$[I]_S^C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow [I]_C^S = \left([I]_S^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

כמו כן,

$$T(1 - x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, T\left(2 + x^2\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, T\left(3 - x + x^2\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ומכאן

$$[T]_S^B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

בסך הכל,

$$[T]_C^B = [I]_C^S \cdot [T]_S^B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 22 & 16 \\ -7 & -13 & -10 \end{pmatrix}$$

תרגיל 2.9 (ממבחן)**.** יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ שעבורו $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)\neq 2$, תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, ונניח ש-$T^2=I$. נגדיר

$$U=\ker\left(T-I\right),\quad W=\ker\left(T+I\right)$$

הוכיחו כי $U\oplus W=V$.

הוכחה. צ"ל שני דברים:

1. $U\cap W=\{0\}$: יהי $v\in U\cap W$. לכן

$$\begin{aligned} v\in\ker\left(T-I\right) &\Rightarrow T\left(v\right)=v\\ v\in\ker\left(T+I\right) &\Rightarrow T\left(v\right)=-v\end{aligned}$$

מכאן $v=T\left(v\right)=-v$, כלומר $2v=0$, וכיוון ש-$\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)\neq 2$ מתקיים $v=0$.

2. $V=U+W$: יהי $v\in V$. צריכים למצוא $u\in U$ ו-$w\in W$ שעבורם $v=u+w$. נניח שמצאנו u,w כאלו. נמצא נוסחה מפורשת עבורם. נפעיל T על המשוואה, ונקבל

$$T\left(v\right)=T\left(u\right)+T\left(w\right)=u-w$$

לכן

$$\begin{cases}u+w=v\\ u-w=T(v)\end{cases}$$

נפתור ונקבל

$$u=\frac{v+T\left(v\right)}{2},\qquad w=\frac{v-T\left(v\right)}{2}$$

אכן

$$v=\frac{v+T\left(v\right)}{2}+\frac{v-T\left(v\right)}{2}$$

נוודא ש-$u\in U$ ו-$w\in W$:

$$\begin{aligned}\left(T-I\right)\left(u\right) &= T\left(u\right)-u=T\left(\frac{v+T\left(v\right)}{2}\right)-\frac{v+T\left(v\right)}{2}=\frac{T\left(v\right)+T^2\left(v\right)}{2}-\frac{v+T\left(v\right)}{2}=0\\ \left(T+I\right)\left(w\right) &= T\left(w\right)+w=T\left(\frac{v-T\left(v\right)}{2}\right)+\frac{v-T\left(v\right)}{2}=\frac{T\left(v\right)-T^2\left(v\right)}{2}+\frac{v-T\left(v\right)}{2}=0\end{aligned}$$

כדרוש.

□