לינארית 2 - פתרון מטלה 9 -מרחב מכפלה פנימית

תאריך הגשה: $18 - 20.6.2018$

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים:

1. **מספר תרגיל**
2. **שם מלא**
3. **ת.ז**
4. **מספר קבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים.**

תרגיל 1.

1. הוכיחו ש-$\langle A,B\rangle = tr\left(AB^t\right)$ היא מכפלה פנימית מעל $V=\mathbb{R}^{n\times n}$ (רשות)

פתרון. כדי להוכיח ש- $\langle A,B\rangle = tr\left(AB^t\right)$ היא מכפלה פנימית יש להוכיח 3 תכונות (לינארית ברכיב הראשון, הרמיטיות, אי-שליליות)

(א) לינאריות:

$$\begin{aligned}
\langle A+\alpha B, C\rangle &= \\
tr\left(\left(A+\alpha B\right)C^t\right) &= \\
tr\left(AC^t+\alpha BC^t\right) &= \\
tr\left(AC^t\right)+\alpha tr\left(\alpha BC^t\right) &= \\
\langle A,C\rangle + \alpha\langle B,C\rangle
\end{aligned}$$

(ב) הרמיטיות (סימטריות):

$$\begin{aligned}
\langle A,B\rangle &= \\
tr\left(AB^t\right) &= \\
tr\left(\left(AB^t\right)^t\right) &= \\
tr\left(BA^t\right) &= \\
\langle B,A\rangle
\end{aligned}$$

(ג) אי-שליליות

$$\begin{aligned}\langle A,A\rangle &= \\ tr\left(AA^t\right) &\overset{*}{=} \\ \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 &\geq \\ 0\end{aligned}$$

ומתקיים

$$\langle A,A\rangle=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2=0\Leftrightarrow\forall i,j:a_{ij}=0$$

*אם נסמן את B להיות AA^t אז

$$b_{jj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}a_{ij}^t=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}a_{ji}=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^2$$

לכן

$$tr\left(B\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2$$

שלושת התכונות מתקיימות, לכן זאת מכפלה פנימית.

2. הוכיחו ש- $\left\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_ix_iy_i$ עבור $\alpha_i>0$ היא מכפלה פנימית מעל $V=\mathbb{R}^n$

פתרון. כדי להוכיח ש- $\left\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_ix_iy_i$ היא מכפלה פנימית יש להוכיח 3 תכונות (לינארית ברכיב הראשון, הרמיטיות, אי-שליליות)

(א) לינאריות:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle \qquad =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 + cy_1 \\ x_2 + cy_2 \\ \vdots \\ x_n + cy_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \left(x_i + cy_i\right) z_i \qquad =$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i z_i + c \sum_{i=1}^n \alpha_i c y_i z_i \qquad =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle + c \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

(ב) הרמיטיות (סימטריות):

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle \qquad =$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i \qquad =$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i \qquad =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

(ג) אי-שליליות

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \qquad =$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i x_i \qquad =$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \qquad \geq$$

$$0$$

ומתקיים

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i : x_i = 0$$

תרגיל 2. הוכיחו שמתקיים $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
שוויון זה נקרא כלל המקבילית כי מבחינה גאומטרית הוא הקובע שבמקבילית סכום ריבועי ארבע צלעות שווה לסכום ריבועי האלכסונים.

פתרון. נתחיל מאגף שמאל ונגיע לאגף ימין

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \\ \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle & \\ \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle + \langle -y,x\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle -y,-y\rangle &= \\ \|x\|^2 + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x+y\|^2 - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle + \|-y\|^2 &= \\ 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 & \end{aligned}$$

תרגיל 3.

1. צטטו את אי-שוויון קושי-שוורץ.

   פתרון. לכל שני וקטורים מתקיים

   $$|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\,\|w\|$$

   וקיים שוויון רק כאשר v,w ת"ל.

2. יהיו $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}$ מספרים ממשים, הוכיחו את אי-השוויון

   $$\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

   פתרון. נייׂשם את אי שוויון קושי שוורץ עבור הווקטורים $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ונקבל

   $$|\langle v,w\rangle| = \left| \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \ge \sum_{i=1}^{n} x_i$$

   ו-

   $$\|v\|\,\|w\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} = \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

   לכן

   $$\sum_{i=1}^{n} x_i \le \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \le \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

תרגיל 4. יהיו $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו- $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. הוכיחו שאוסף כל הווקטורים ב-$\mathbb{R}^4$ האורתוגונלים לשני הווקטורים האלו הוא תתי מרחב של $\mathbb{R}^4$.

פתרון. כדי להוכיח ש-$S^{\perp}$ הוא תת מרחב צריך להוכיח שני תכונות

(א) שייכות של 0: $\langle v_1, 0\rangle = 0, \langle v_2, 0\rangle = 0$ לכן $0 \in S^{\perp}$

(ב) סגירות: יהיו $w_1, w_2 \in S^{\perp}$ צריך להוכיח ש-

$$\begin{cases} \langle w_1 + \alpha w_2, v_1\rangle = 0 \\ \langle w_1 + \alpha w_2, v_2\rangle = 0 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} \langle w_1, v_1\rangle + \alpha \langle w_2, v_1\rangle = 0 \\ \langle w_1, v_2\rangle + \alpha \langle w_2, v_2\rangle = 0 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} 0 + \alpha 0 = 0 \\ 0 + \alpha 0 = 0 \end{cases}$$

2. מצאו בסיס לתת מרחב הזה.

פתרון. נסמן את אוסף הווקטורים הללו ב-V אז מתקיים

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, v_1 \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, v_1 \right\rangle = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} x + y + w &= 0 \\ x + y + z + 2w &= 0 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

כלומר V הוא אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית כבר ראינו זה תת מרחב.

כדי למצוא בסיס נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} -t-s \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\} = Span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל 5. הפוך את $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ לבסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^3$

פתרון. ראשית נבחר $w_1=v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$w_2=v_2-\frac{<v_2,w_1>}{||w_1||^2}w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}w_3&=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{9}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

כעת $\{w_1,w_2,w_3\}$אורתוגונלית (בדקו!). ננרמל את הוקטורים
$||w_1||=\sqrt{3}\quad||w_2||=\sqrt{\frac{6}{9}}\quad||w_3||=\sqrt{\frac{1}{2}}$
כעת

$$\left\{\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{3}},\frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{6}{9}}},\frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right\}$$

תרגיל 6. יהיה V ממ"פ, ו-$S=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס לת"מ W הוכיחו ש-$W^\perp=S^\perp$.

פתרון. נראה הכלה דו כיוונית:

- $W^\perp\subseteq S^\perp$: יהי $u\in W^\perp$ לכן לפי ההגדרה של $W^\perp$ מתקיים

$$u\in\{v\in V|\forall w\in W:\ \langle u,w\rangle=0\}$$

כיוון ש-$S\subseteq W$ זה מקיים בפרט לכל בווקטורים ב-S לכן

$$u\in\{v\in V|\forall v_i\in S:\ \langle u,v_i\rangle=0\}=S^\perp$$

- $W^\perp\supseteq S^\perp$: יהי $u\in S^\perp$ לכן לפי ההגדרה של $S^\perp$ מתקיים

$$u\in\{v\in V|\forall v_i\in S:\ \langle v_i,u\rangle=0\}$$

נראה u שייך גם ל- $W^\perp$, כלומר צריך להראות שלכל $w\in W$ מתקיים $\langle w,u\rangle=0$ ואכן מתקיים

$$\langle w,u\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i,u\right\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_i\langle v_i,u\rangle=0$$

לכן $u\in W^\perp$.

בהצלחה!!