89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 2

פרדיקטים וכמתים לוגיים

הגדרה: פרדיקט הוא "פונקציה" שמקבלת משתנה אחד או מספר משתנים ומחזירה ערך אמת True/False. המשתנים עצמם מגיעים מעולם כלשהו שמגדירים בהתאם לסיטואציה.
ניתן לחשוב על פרדיקט כעל תכונה מסוימת כך שלמשתנים יש את התכונה או לא.
הגדרה: יהי P פרדיקט כלשהו.
משמעות הפסוק $\forall x: P(x)$ היא "לכל x בעולם מתקיים $P(x)$".
משמעות הפסוק $\exists x: P(x)$ היא "קיים x בעולם עבורו מתקיים $P(x)$".
משמעות הפסוק $\exists! x: P(x)$ היא "קיים x יחיד בעולם עבורו מתקיים $P(x)$".
דוגמה: נסתכל על עולם בני האדם.
נגדיר $M(x)$ להיות "x הוא גבר", ו $B(x)$ להיות "ל x יש שיער חום".
מה המשמעות של הפסוקים הבאים:

1. $\exists! x\big(M(x) \wedge B(x)\big)$.
   קיים בן אדם יחיד שהוא גבר וגם יש לו שיער חום. (כלומר, קיים גבר יחיד עם שער חום.)
2. $\forall x\big(M(x) \Rightarrow B(x)\big)$.
   לכל בן אדם, אם הוא גבר אזי יש לו שיער חום. (כלומר, לכל גבר יש שער חום.)

תרגיל: נסתכל על עולם בעלי החיים, ונגדיר את הפרדיקט $Dog(x)$ להיות "x הוא כלב", והפרדיקט $Tail(x)$ להיות "x מכשכש בזנב".
מה המשמעות של הפסוק $\forall x\big(Dog(x) \Rightarrow Tail(x)\big)$?
פתרון: לכל בעל חיים x, אם x הוא כלב אזי x מכשכש בזנב. (כלומר, כל כלב מכשכש בזנב.)
תרגיל: מה יהיה הפסוק המתאים למשפט "לכל דוגמנית יש שחקן כדורגל שהיא אוהבת"?
פתרון: נניח שהעולם הוא בני אדם. נגדיר פרדיקטים

- $P(x)$ להיות "x היא דוגמנית".
- $Q(x)$ להיות "x הוא שחקן כדורגל".
- $L(x,y)$ להיות "x אוהב את y".

כעת $\forall x\left(P(x) \Rightarrow \exists y\big(Q(y) \wedge L(x,y)\big)\right)$.

הערה: שימו לב שהפסוק $\forall x\left(P(x) \Rightarrow \exists y\big(Q(y) \Rightarrow L(x,y)\big)\right)$ שונה מהמשפט בתרגיל.
משמעות הפסוק החדש היא שלכל דוגמנית קיים בן אדם שאם הוא שחקן כדורגל אז היא אוהבת אותו.
לפי פסוק זה יתכן שקיימת דוגמנית שלא אוהבת אף אחד מכיון שאין שחקני כדורגל.
משפט (שלילת כמתים): יהי P פרדיקט, אזי

- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

מסקנה: יהי P פרדיקט, אזי

- $\forall x P(x) \equiv \neg\neg\forall x P(x) \equiv \neg\exists x \neg P(x)$
- $\exists x P(x) \equiv \neg\neg\exists x P(x) \equiv \neg\forall x \neg P(x)$

<u>המשך תרגיל</u>: שלול את הטענה "לכל דוגמנית יש שחקן כדורגל שהיא אוהבת":

<u>פתרון</u>: ראינו שהפסוק הוא $\forall x\left(P(x)\Rightarrow \exists y\big(Q(y)\wedge L(x,y)\big)\right)$.

שלילת הפסוק היא $\neg\forall x\left(P(x)\Rightarrow \exists y\big(Q(y)\wedge L(x,y)\big)\right)$.

משלילת כמתים נקבל $\exists x\neg\left(P(x)\Rightarrow \exists y\big(Q(y)\wedge L(x,y)\big)\right)$.

מזהות הגרירה נקבל $\exists x\neg\left(\neg P(x)\vee \exists y\big(Q(y)\wedge L(x,y)\big)\right)$.

מדה מורגן נקבל $\exists x\left(P(x)\wedge\neg\exists y\big(Q(y)\wedge L(x,y)\big)\right)$.

משלילת כמתים נקבל $\exists x\left(P(x)\wedge\forall y\neg\big(Q(y)\wedge L(x,y)\big)\right)$.

מדה מורגן נקבל $\exists x\left(P(x)\wedge\forall y\big(\neg Q(y)\vee\neg L(x,y)\big)\right)$.

מזהות הגרירה נקבל $\exists x\left(P(x)\wedge\forall y\big(Q(y)\Rightarrow\neg L(x,y)\big)\right)$.

קיבלנו, קיים בן אדם שהוא דוגמנית וגם לכל בן אדם אם הוא שחקן כדורגל אז היא לא אוהבת אותו.
(כלומר, קיימת דוגמנית שלא אוהבת אף שחקן כדורגל.)

<u>תרגיל</u>: שלול את הטענה הבאה (עולם בני האדם): "לכל בן אדם יש בן דוד שהוא לא אוהב".

<u>פתרון</u>: נגדיר פרדיקטים:

$R(x,y)$ שמשמעותו "x בן דוד של y" ו $L(x,y)$ שמשמעותו "x אוהב את y".

אזי הפסוק הוא $\forall x\exists y\big(R(x,y)\wedge\neg L(x,y)\big)$.

כעת נשלול את הפסוק $\neg\forall x\exists y\big(R(x,y)\wedge\neg L(x,y)\big)$.

משלילת כמתים נקבל $\exists x\neg\exists y\big(R(x,y)\wedge\neg L(x,y)\big)$.

משלילת כמתים נקבל $\exists x\forall y\neg\big(R(x,y)\wedge\neg L(x,y)\big)$.

לפי דה מורגן זה שקול ל $\exists x\forall y\big(\neg R(x,y)\vee\neg\neg L(x,y)\big)$.

משלילה כפולה זה שקול ל $\exists x\forall y\big(\neg R(x,y)\vee L(x,y)\big)$.

לפי זהות הגרירה זה שקול ל $\exists x\forall y\big(R(x,y)\Rightarrow L(x,y)\big)$.

כלומר קיים בן אדם x, כך שלכל בן אדם y, אם x בן דוד של y, אז x אוהב את y.
(קיים בן אדם שאוהב את כל בני דודיו.)

<u>תרגיל</u>: שלול את הטענה הבאה (עולם בני האדם): "קיים בן אדם שלא כל החברים שלו שכנים שלו".

<u>פתרון</u>: נגדיר פרדיקטים:

$P(x,y)$ שמשמעותו "y חבר של x", ו $Q(x,y)$ שמשמעותו "y שכן של x".

אזי הפסוק הוא $\exists x\left(\neg\left(\forall y\big(P(x,y)\Rightarrow Q(x,y)\big)\right)\right)$.

כעת נשלול את הפסוק $\neg\exists x\left(\neg\left(\forall y\big(P(x,y)\Rightarrow Q(x,y)\big)\right)\right)$.

לפי שלילת כמתים זה שקול ל $\forall x\neg\neg\left(\forall y\big(P(x,y)\Rightarrow Q(x,y)\big)\right)$.

וכעת נבטל את השלילה הכפולה ונקבל $\forall x\forall y\big(P(x,y)\Rightarrow Q(x,y)\big)$.

קיבלנו, לכל בן אדם x ולכל בן אדם y, אם y חבר של x, אז y שכן של x.
(כלומר, לכל בן אדם, כל חבריו שכנים שלו.)

<u>הערה</u>: שימו לב שמשמעות הפסוק $\exists x\left(\neg\left(\forall y\big(P(x,y)\wedge Q(x,y)\big)\right)\right)$ שונה ממשמעות המשפט בתרגיל. משמעות פסוק זה היא שקיים בן אדם שלא כל בן אדם הוא חבר שלו ושכן שלו.

<u>כללי היסק נוספים:</u>
<u>דוגמה</u>: הנחות: לכל כלב יש זנב. חומי הוא כלב.
מסקנה: לחומי יש זנב (Universal Specification)
<u>דוגמה</u>: הנחות: חומי הוא כלב. לחומי יש זנב.
מסקנה: קיים כלב עם זנב (Existential Generalization)

שם הכלל	**כלל ההיסק**
Universal Specification (US.)	אם $\forall x: P(x)$ ו a שייך לעולם, נובע ש $P(a)$ נכון
Universal Generalization (UG.)	אם לכל a בעולם מתקיים $P(a)$, נובע ש $\forall x: P(x)$
Existential Specification (ES.)	אם $\exists x: P(x)$ נובע ש $P(a)$ נכון עבור a מסוים בעולם
Existential Generalization (EG.)	אם עבור a מסוים בעולם $P(a)$ נכון, נובע ש $\exists x: P(x)$

<u>תרגיל</u>: הוכח את ההיסק הבא:
ההנחות הן $\forall x\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big), \forall x\big(Q(x) \Rightarrow R(x)\big)$, המסקנה היא $\forall x\big(P(x) \Rightarrow R(x)\big)$.
<u>הוכחה</u>: תחילה נשים לב שאם העולם ריק, אז לא קיים x בעולם עבורו מתקיים $P(x)$.
לכן לכל x בעולם לא מתקיים $P(x)$, ונובע מכך שלכל x בעולם מתקיים $P(x) \Rightarrow R(x)$.
לכן המסקנה נכונה באופן טריויאלי.
כעת נניח שהעולם לא ריק.
יהי a אבר שרירותי בעולם. לפי US מ $\forall x\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ נובע $P(a) \Rightarrow Q(a)$.
לפי US מ $\forall x\big(Q(x) \Rightarrow R(x)\big)$ נובע $Q(a) \Rightarrow R(a)$ עבור אותו a.
מסילוגיזם היפותטי $P(a) \Rightarrow Q(a), Q(a) \Rightarrow R(a) \vdash P(a) \Rightarrow R(a)$.
בחרנו את a באופן שרירותי, ולכן לכל אבר a בעולם מתקיים $P(a) \Rightarrow R(a)$,
כעת מ UG נובע $\forall x\big(P(x) \Rightarrow R(x)\big)$.
<u>הערה</u>: הטיעון הבא אינו נכון. נסו לחשוב על דוגמה נגדית שמפריכה אותו:
ההנחות הן $\exists x\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big), \exists x\big(Q(x) \Rightarrow R(x)\big)$, המסקנה היא $\exists x\big(P(x) \Rightarrow R(x)\big)$.
<u>תרגיל</u>: הוכח את ההיסק הבא (בעולם בעלי החיים):
יש קופים שאוכלים בננות. כל הקופים הם יונקים. לכן, יש יונקים שאוכלים בננות.
<u>הוכחה</u>: נגדיר את הפרדיקטים הבאים:
$P(x)$ משמעותו x הוא קוף, $Q(x)$ משמעותו x הוא יונק, $R(x)$ משמעותו x אוכל בננות.
ההנחות הן $\forall x\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big), \exists x\big(P(x) \wedge R(x)\big)$, והמסקנה היא $\exists x\big(Q(x) \wedge R(x)\big)$.
לפי ES מ $\exists x\big(P(x) \wedge R(x)\big)$ נובע $P(a) \wedge R(a)$ עבור a מסוים.
לפי חוק הפישוט, מ $P(a) \wedge R(a)$ נובע $P(a)$ ובנוסף נובע $R(a)$.
לפי US מ $\forall x\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$, נובע $P(a) \Rightarrow Q(a)$ עבור אותו a.
לפי מודוס פוננס, מ $P(a), P(a) \Rightarrow Q(a)$ נובע $Q(a)$.
לפי חוק החיבור, מ $R(a), Q(a)$ נובע $Q(a) \wedge R(a)$.
קיבלנו שעבור a מסוים בעולם מתקיים $Q(a) \wedge R(a)$, ולכן מ EG נובע $\exists x\big(Q(x) \wedge R(x)\big)$.

<u>תרגיל</u>: הוכח את ההיסק הבא (בעולם התכניות):

אין תוכנית ריאליטי שהיא תוכנית בוקר או תוכנית ערב.

הישרדות היא תוכנית ריאליטי.

לכן, קיימת תוכנית שאינה תוכנית ערב.

<u>הוכחה</u>: נסמן את הישרדות ב a נגדיר את הפרדיקטים הבאים:

- $P(x)$ משמעותו x היא תוכנית בוקר.
- $Q(x)$ משמעותו x היא תוכנית ערב.
- $R(x)$ משמעותו x היא תוכנית ריאליטי.

ההנחות הן $R(a)$, $\neg\exists x\left(R(x) \wedge \left(P(x) \vee Q(x)\right)\right)$, והמסקנה היא $\exists x: \neg Q(x)$.

תחילה נפשט את ההנחה

$$\neg\exists x\left(R(x) \wedge \left(P(x) \vee Q(x)\right)\right) \overset{\text{שלילת כמתים}}{\equiv} \forall x \neg\left(R(x) \wedge \left(P(x) \vee Q(x)\right)\right) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$$

$$\forall x\left(\neg R(x) \vee \neg\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \forall x\left(R(x) \Rightarrow \neg\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$$

$$\forall x: \left(R(x) \Rightarrow \left(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)\right)\right)$$

מכיון ש $\forall x\left(R(x) \Rightarrow \left(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)\right)\right)$, נובע מ US שבפרט עבור הישרדות מתקיים $R(a) \Rightarrow \left(\neg P(a) \wedge \neg Q(a)\right)$.

ממודוס פוננס נקבל $R(a) \Rightarrow \left(\neg P(a) \wedge \neg Q(a)\right), R(a) \vdash \neg P(a) \wedge \neg Q(a)$.

מכלל הפישוט נקבל $\neg P(a) \wedge \neg Q(a) \vdash \neg Q(a)$

קיבלנו שעבור הישרדות מתקיים $\neg Q(a)$, לכן מ EG נובע $\exists x: \neg Q(x)$.

<u>צורות נורמליות (Normal Forms)</u>

<u>הגדרה</u>: *ליטרל* הוא פסוק אטומי או שלילתו של פסוק אטומי.

פסוקית או היא פסוק שמורכב מליטרלים שמקושרים ביניהם על ידי הקשר או.

פסוקית גם היא פסוק שמורכב מליטרלים שמקושרים ביניהם על ידי הקשר גם.

<u>הגדרה</u>: פסוק הוא בצורת ***CNF*** (Conjunctive Normal Form) אם הוא מהצורה $c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n$, כאשר עבור כל $1 \leq i \leq n$ הפסוק c_i הוא פסוקית או.

פסוק הוא בצורת ***DNF*** (Disjunctive Normal Form) אם הוא מהצורה $d_1 \vee d_2 \vee \ldots \vee d_n$, כאשר עבור כל $1 \leq i \leq n$ הפסוק d_i הוא פסוקית גם.

<u>דוגמה</u>: הפסוק $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg s) \wedge (q \vee r)$ הוא בצורת CNF.

הפסוק $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r \wedge \neg s) \vee s$ הוא בצורת DNF.

<u>משפט</u>: לכל פסוק קיים פסוק שקול בצורת CNF. לכל פסוק קיים פסוק שקול בצורת DNF.

<u>מעבר לצורות CNF או DNF</u>

<u>דרך ראשונה בעזרת זהויות לוגיות</u>

תחילה נייצג את הפסוק בעזרת הקשרים $\{\neg,\vee,\wedge\}$.

בעזרת כללי דה מורגן "נכניס" את השלילות פנימה, ונבטל שלילות כפולות.

בעזרת חוק הדיסטריביוטיביות נפשט את הפסוק לצורה הרצויה.

<u>תרגיל</u>: מצא צורות CNF ו DNF לפסוק $\neg\big((q \Rightarrow p) \wedge \neg r\big)$.

<u>פתרון</u>:

$$\neg\big((q \Rightarrow p) \wedge \neg r\big) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg\big((\neg q \vee p) \wedge \neg r\big) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \neg(\neg q \vee p) \vee \neg\neg r \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} \neg(\neg q \vee p) \vee r \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$$

$$(\neg\neg q \wedge \neg p) \vee r \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} (q \wedge \neg p) \vee r$$

זהו DNF של הפסוק, על מנת לקבל CNF נשים לב ש

$$(q \wedge \neg p) \vee r \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{\equiv} (q \vee r) \wedge (\neg p \vee r)$$

<u>דרך שניה בעזרת טבלת אמת</u>

בהינתן פסוק כלשהו, על מנת למצוא את צורת ה DNF המלאה נרשום את טבלת האמת שלו.

בשלב הראשון לכל שורה שיש בה T בטבלה, נתאים פסוק שערכו יהיה T אך ורק עבור ההשמה בשורה הזו. נבצע זאת על ידי "גם" בין הפסוקים האטומיים.

בשלב השני נבצע "או" בין הפסוקים.

<u>תרגיל</u>: מצא צורות CNF ו DNF לפסוק $(q \vee p) \Rightarrow (\neg p \wedge r)$.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{q \vee p}$	$\boldsymbol{\neg p \wedge r}$	$\boldsymbol{(q \vee p) \Rightarrow (\neg p \wedge r)}$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T

נסתכל על שורות 5,7,8 (השורות שבהן יש ערך T).

עבור שורה 5 נגדיר את הפסוק $(\neg p \wedge q \wedge r)$.

עבור שורה 7 נגדיר את הפסוק $(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$.

עבור שורה 8 נגדיר את הפסוק $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

נבצע "או" בין הפסוקים ונקבל $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

וזו צורת ה DNF המלאה של הפסוק.

על מנת למצוא CNF, תחילה נמצא DNF של שלילת הפסוק, ולאחר מכן נשלול את התוצאה ונשתמש בכללי דה מורגן.

<u>המשך תרגיל</u>: נמצא את צורת CNF של הפסוק. ראשית, נבנה טבלה אמת עבור שלילת הפסוק

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\neg\big((\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) \Rightarrow (\neg \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r})\big)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

נחשב DNF ונקבל

$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$.

נשלול את הביטוי ובעזרת דה מורגן נקבל

$$\neg\big((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)\big) \equiv$$
$$\neg(p \wedge q \wedge r) \wedge \neg(p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(p \wedge \neg q \wedge r) \wedge \neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \equiv$$
$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$

<u>קבוצות שלמות של קשרים</u>

<u>הגדרה</u>: הקשר NAND מסומן על ידי $\uparrow$ ומוגדר להיות $p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q)$.

הקשר NOR מסומן על ידי $\downarrow$ ומוגדר להיות $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$.

<u>הגדרה</u>: קבוצה של קשרים S נקראת *שלמה* אם לכל פסוק p קיים פסוק q השקול לו כך שכל הקשרים בפסוק q שייכים לקבוצה S.

<u>משפט</u>: הקבוצות הבאות הן קבוצות שלמות של קשרים:

- $\{\neg, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\uparrow\}$
- $\{\downarrow\}$
- $\{\neg, \Rightarrow\}$

<u>תרגיל</u>: בטא את הפסוק $(p \wedge q) \vee (r \Rightarrow \neg p)$ בעזרת $\{\neg, \vee\}$.

<u>פתרון</u>

$$(p \wedge q) \vee (r \Rightarrow \neg p) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} (p \wedge q) \vee (\neg r \vee \neg p) \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} \neg\neg(p \wedge q) \vee (\neg r \vee \neg p) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$$
$$\neg(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg r \vee \neg p)$$

<u>תזכורת</u>: במהלך ההוכחה ש $\{\uparrow\}$ היא קבוצה שלמה של קשרים מסתמכים על המשפט ש $\{\neg, \vee\}$ קבוצה שלמה של קשרים, ומראים ש

$$\neg p \overset{\text{אידמפוטנטיות}}{\equiv} \neg p \vee \neg p \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \neg(p \wedge p) \overset{\text{הגדרת NAND}}{\equiv} p \uparrow p$$

$$p \vee q \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} \neg\neg p \vee \neg\neg q \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \neg(\neg p \wedge \neg q) \overset{\text{הגדרת NAND}}{\equiv} \neg p \uparrow \neg q \overset{\neg p \equiv p \uparrow p}{\equiv} (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$$

<u>תרגיל</u>: בטא את הפסוק $\neg(p \Rightarrow q) \vee (r \wedge p)$ בעזרת $\{\uparrow\}$.

<u>פתרון</u>:

$$\neg(p \Rightarrow q) \vee (r \wedge p) \overset{\text{גרירה, שלילה כפולה}}{\equiv} \neg(\neg p \vee q) \vee \neg\neg(r \wedge p) \overset{\text{הגדרת NAND}}{\equiv} \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(r \uparrow p) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$$
$$\neg\big((\neg p \vee q) \wedge (r \uparrow p)\big) \overset{\text{הגדרת NAND}}{\equiv} (\neg p \vee q) \uparrow (r \uparrow p) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \neg(p \wedge \neg q) \uparrow (r \uparrow p) \overset{\text{הגדרת NAND}}{\equiv}$$
$$(p \uparrow \neg q) \uparrow (r \uparrow p) \overset{\neg q \equiv q \uparrow q}{\equiv} \big(p \uparrow (q \uparrow q)\big) \uparrow (r \uparrow p)$$