תרגיל 13 – אלגברה מופשטת 1

.1

נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:

$\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5 \ \ ,\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10} \ \ ,\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5 \ \ ,\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4 \ \ ,U_{10}\times\mathbb{Z}_{10} \ \ ,\mathbb{Z}_{40}$

<u>פתרון</u>

$\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5 \cong\mathbb{Z}_{40}$ שכן $(8,5)=1$. האקספוננט של חבורה זו הוא 40.

$U_{10}=\{1,3,7,9\}\cong\mathbb{Z}_4$ (בדקו ש U_{10} ציקלית) וכמו כן $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_{10}$ ולכן $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}\cong U_{10}\times\mathbb{Z}_{10}$. האקספוננט של החבורה הזו הוא 20.

לבסוף האקספוננט של $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$ הוא 10. לכן קיבלנו בסה"כ שלוש חבורות שאינן איזומורפיות.

דרך אחרת- מעבירים לצורה הקנונית שהיא יחידה עד כדי איזומורפיזם.

הצורה הקנונית הראשונה היא $\mathbb{Z}_{40}$, השניה היא $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{20}$. שימו לב:

$\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{20}$.

השלישית היא $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{10}$.

.2 ענו על הסעיפים הבאים:

2.1 כמה חבורות אבליות מסדר 500 (עד כדי איזומורפיזם) יש?

פתרון:

$500=2^2\cdot5^3$.

החבורות האבליות הדרושות הן מכפלה ישרה של תת חבורה 2- סילו מסדר 4, בתת חבורה 5-סילו מסדר 125.

יש שתי אפשרויות לתת חבורה 2-סילו מסדר 4 שהיא כמובן אבלית והן: $\mathbb{Z}_4 \ \ , \ \ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

יש שלוש אפשרויות לת"ח 5-סילו והן: $\mathbb{Z}_{125},\mathbb{Z}_{25}\times\mathbb{Z}_5,\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$.

בסה"כ יש $2\cdot3=6$ חבורות אבליות מסדר 500.

2.2 בכמה מהן יש איבר מסדר 4?

ב-3 מהן (כאשר מופיע בפירוק $\mathbb{Z}_4$).

2.3 בכמה מהן יש איבר מסדר 20?

ב-3 מהן. (כאשר מופיע בפירוק $\mathbb{Z}_4$) זה נובע מכך שבת"ח 5-סילו יש תמיד איבר מסדר 5, וכמו כן החיתוך של תת חבורה זו עם תת חבורת 2-סילו הוא טריוויאלי.

3. מצאו מספר חבורות אבליות (עד כדי אוזימורפיזם) מסדר 3600. בכמה מהן יש תת-חבורה 5-סילו ציקלית?

פתרון:

$3600=2^4\cdot3^2\cdot5^2$, משיקולים דומים לשאלה הקודמת יש $5\cdot2\cdot2=20$ חבורות אבליות מסדר 3600 עד כדי איזומורפיזם. ת"ח 5-סילו (כלומר מסדר 25) תהיה ציקלית אמ"מ מופיע הגורם $\mathbb{Z}_{25}$ ולא $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$. יש $5\cdot2=10$ כאלו עד כדי איזומורפיזם.

4. מצאו את $\exp(S_3),\exp(S_5)$.

פתרון:

נמצא את סדרי האיברים ב-S_3: id מסדר 1, כל חילוף הוא מסדר 2, וכל מחזור מאורך 3 הוא מסדר 3. סה"כ יש איברים מסדר 1,2,3, ו-$lcm(1,2,3)=6$ לכן האקספוננט של S_3 הוא 6. כעת נמצא את סדרי האיברים ב-S_5: id מסדר 1, כל מחזור מאורך k ($2\le k\le5$) הוא מסדר k, תמורות מהצורה $(12)(34)$ הן מסדר 2 ותמורות מהצורה $(12)(345)$ הן מסדר 6. לכן סה"כ סדרי האיברים ב-S_5 הם $1,2,3,4,5,6$. מתקיים $lcm(1,2,3,4,5,6)=60$ לכן $\exp(S_5)=60$.

5. ענו על הסעיפים הבאים:

5.1 מצאו כמה איברים מכל סדר יש בחבורות:
$\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_{p^2}\oplus\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_{p^3}$.

פתרון:

בכל החבורות יש איבר אחד מסדר 1 והוא איבר היחידה. ב $\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p$ כל שאר האיברים, כלומר p^3-1 איברים הם מסדר p. ב-$\mathbb{Z}_{p^2}$ יש $\phi(p^2)=p^2(1-\frac{1}{p})=p^2-p$ איברים מסדר p^2. האיברים מסדר p^2 ב-$\mathbb{Z}_{p^2}\oplus\mathbb{Z}_p$ הם בדיוק האיברים $(a,b)\in\mathbb{Z}_{p^2}\oplus\mathbb{Z}_p$ כך ש $o(a)=p^2$. מכאן שמספרם הוא $(p^2-p)p=p^3-p^2$. לכן מספר האיברים מסדר p ב-$\mathbb{Z}_{p^2}\oplus\mathbb{Z}_p$ הוא: $p^3-(p^3-p^2)-1=p^2-1$.

באופן דומה מספר האיברים מסדר p^3 ב- $\mathbb{Z}_{p^3}$ הוא:

$\phi(p^3)=p^3(1-\frac{1}{p})=p^3-p^2$. איברים מסדר p בחבורה זו הם כל האיברים מהצורה p^2a כאשר $1\le a\le p-1$ ולכן יש $p-1$ כאלה. לכן מספר האיברים מסדר p^2 הוא $p^3-(p-1)-1=p^3-p$.

5.2 הוכיחו שבחבורת p אבלית לא ציקלית יש תת חבורה מסדר p^2 שאינה ציקלית.

פתרון:

כדי שחבורת p אבלית לא תהיה ציקלית היא צריכה לכלול גורם מהצורה $\mathbb{Z}_{p^\alpha}\oplus\mathbb{Z}_{p^\beta}$ כאשר $1\le\alpha<\beta$. עפ"י משפט קושי קיימות $H\le\mathbb{Z}_{p^\beta}, G\le\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ כך ש $H\cong G\cong\mathbb{Z}_p$. תת החבורה הדרושה היא $H\oplus G$.

6. האם קיימת חבורה אבלית G, כך ש- $\exp(G)=4$, $|G|=32$, ו- $\left[G:G^2\right]=4$?

פתרון:

$\exp(G)=4$, $|G|=32$ ומכאן G איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4$ או ל $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$.

$$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4 \big/ 2(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2/2\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$$

והסדר המתקבל הוא שמונה.

$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4 \big/ 2(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ וסדר החבורה הוא 16. בכל מקרה לא מקבלים $\left[G:G^2\right]=4$ ולכן אין חבורה כזו.

7. מצאו את כל החבורות מסדר 637, עד כדי איזומורפיזם.

פתרון: $637=7^2\cdot13$. תהי G חבורה מסדר 637. לפי משפט סילו, מספר חבורות 7-סילו n_7 מקיים $n_7=1+7k|13$. לכך, $n_7=1$ ו תת החבורה 7-סילו P_7 נורמלית. באופן דומה, מספר חבורות 13-סילו n_{13} מקיים $n_{13}=1+13k|49$. לכך, $n_{13}=1$ ו תת החבורה 13-סילו P_{13} נורמלית. מכיוון ש $|P_7|=7^2$ ו $|P_{13}|$ ראשוני, P_7 ו P_{13} אבליות.

מכיוון ש P_7 ו P_{13} תת חבורות נורמליות, $P_7P_{13}\le G$ ו $P_7,P_{13}\lhd P_7,P_{13}$. מכיוון ש $|P_7|$ ו $|P_{13}|$ זרים, $P_7\cap P_{13}=\{e\}$ לכן (מכיוון ש $P_7\cdot P_{13}=P_7P_{13}$) לפי משפט פיצול חבורות $P_7P_{13}\cong P_7\times P_{13}$ חבורה אבלית כמכפלה של חבורות אבליות.

אבל $P_7P_{13} \le G$ ו $|P_7P_{13}| = |P_7 \times P_{13}| = 7^2 \cdot 13 = |G|$ לכן, $P_7P_{13} = G$ ו G אבלית.

לכן לפי משפט הפיצול של חבורות אבליות סופיות החבורות מסדר

$637 = 7^2 \cdot 13$ עד כדי איזומורפיזם הן החבורות: $Z_{49} \times Z_{13} \cong Z_{637}$ ו $Z_7 \times Z_7 \times Z_{13}$.

8. מצאו את ה- $n > 1$ הקטן ביותר שאינו ראשוני עבורו כל החבורות מסדר n איזומורפיות.

פתרון: לכל מספר טבעי n קיימת חבורה ציקלית מסדר n. לכן עלינו למצוא $n > 1$ טבעי לא ראשוני כך שכל חבורה מסדר n היא ציקלית.

אם n זוגי לא ראשוני ($n \ne 2$) אזי קיימת חבורה לא ציקלית מסדר n - $D_{n/2}$.

אם ב n יש גורם ראשוני בחזקה הגדולה מאחת – כלומר $n = p^2r$ עבור p ראשוני (כש p,r לא בהכרח זרים) אזי, החבורה $Z_p \times Z_p \times Z_r$ היא חבורה לא ציקלית מסדר $n = p^2r$ (כל איבר בחבורה זו הוא מסדר pr לכל היותר).

לכן, n הוא אי זוגי לא ראשוני שבפירוק שלו לראשוניים אין אף ראשוני בחזקה גדולה מאחת.

המספר הקטן ביותר מסוג זה הוא $n = 15$.

בנוסף, אם $|G| = 15 = 3 \cdot 5$, אזי לפי משפט מהתירגול, מכיוון ש $5 \ne 1 \bmod 3$,

G ציקלית. לכן $n = 15$ הוא המספר המבוקש.

בהצלחה! ☺