שיעור 10

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

תהיי A מטריצה n- ריבועית מעל שדה הממשיים. מספר ממשי λ נקרא ערך עצמי של A אם קיים וקטור שונה מאפס $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש: $Av = \lambda v$.

כל וקטור המקיים תנאי זה נקרא וקטור עצמי של A, השייך לערך עצמי λ.

דוגמא 1

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ נשים לב ש $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

מכיוון ש $Av = 4v$ נקבל ש 4 ערך עצמי ו $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ השייך לערך עצמי 4.

דוגמא 2

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ נשים לב ש $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

נשים לב שגם $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי 4.

באופן כללי גם $\begin{pmatrix} 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי 4.

הערה

אם v וקטור עצמי של A, השייך לערך עצמי λ אז גם αv וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ.

הסבר: $Av = \lambda v \Rightarrow \alpha(Av) = \alpha(\lambda v) \Rightarrow A(\alpha v) = \lambda(\alpha v)$.

הערה

אם A מטריצה הפיכה אז למערכת המשוואות $Ax = 0$ יש פתרון יחיד והוא פתרון האפס.

הסבר: אם A הפיכה אז קיימת לה מטריצה הופכית ואז נקבל ש

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 \Leftarrow Ax = 0$$

$$x = 0 \Leftarrow x = Ix = \left(A^{-1}A\right)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0$$

תזכורת

מטריצה ריבועית A הפיכה אם ורק אם $|A| = 0$.

מסקנה

למשוואה $Ax = 0$ יש פתרון יחיד (שהוא פתרון האפס) אם ורק אם $|A| = 0$.

דוגמאות

1. נתבונן במערכת המשוואות $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

נבדוק האם המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה.

$|A|=1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=1\cdot2-2\cdot(-1)=4$ ולכן למערכת המשוואות יש פתרון יחיד שהוא פתרון האפס $x=y=z=0$.

2. נתבונן במערכת המשוואות $\begin{cases}x+2y=0\\2x+y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$

נבדוק האם המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה.

$|A|=1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot2-2\cdot1=0$ ולכן בנוסף לפתרון $x=y=z=0$ יש למערכת המשוואות יש פתרון נוסף. למשל: $x=-2; y=1; z=3$.

<u>מציאת ערך עצמי ווקטור עצמי מתאים</u>

נקצה למצוא ערך עצמי למטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ ז"א יש למצוא וקטור שונה מאפס $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ כך ש

$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ ולכן

$$\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

מכיוון שהווקטור $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ שונה מאפס נקבל שלמשוואה $\begin{pmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ יש יותר מפתרון אחד ואז הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{pmatrix}$ שווה לאפס.

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda-2)-6\Rightarrow\lambda^2-3\lambda-4=0.$$

למערכת המשוואות יש פתרון שהוא לא פתרון האפס כאשר $\lambda^2-3\lambda-4=0$.

הפולינום $p(\lambda)=\lambda^2-3\lambda-4$ נקרא הפולינום האופייני.

נפתור את המשוואה הנ"ל ונקבל $\lambda^2-3\lambda-4=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=4$.

הערכים העצמיים הם $\lambda=4,\lambda=-1$.

לכל ערך עצמי נמצא את הווקטורים העצמיים המתאימים לו.

נמצא את הווקטורים העצמיים המתאימים לערך עצמי $\lambda=4$.

נציב $\lambda=4$ במערכת המשוואות $\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2\\ -3 & \lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ ונקבל

$$\begin{cases}3v_1-2v_2=0\\ -3v_1+2v_2=0\end{cases}\overset{R_1+R_2\to R_2}{\approx}\begin{cases}3v_1-2v_2=0\\ 0v_1+0v_2=0\end{cases}.\begin{cases}3v_1-2v_2=0\\ -3v_1+2v_2=0\end{cases}\Leftarrow\begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

המשתנה החופשי הוא v_2, נציב $v_2=3$ ונקבל את הפתרון $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$ וכל ווקטור מהצורה $\begin{pmatrix}2t\\ 3t\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המשוואה. סה"כ קיבלנו שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}2t\\ 3t\end{pmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}$ היא קבוצת כל הווקטורים העצמיים שמתאימים לערך עצמי $\lambda=4$.

נציב $\lambda=-1$ במערכת המשוואות $\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2\\ -3 & \lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ ונקבל

$$\begin{cases}-2v_1-2v_2=0\\ -3v_1-3v_2=0\end{cases}\overset{R_1-R_2\to R_2}{\approx}\begin{cases}-2v_1-2v_2=0\\ 0v_1+0v_2=0\end{cases}.\begin{cases}-2v_1-2v_2=0\\ -3v_1-3v_2=0\end{cases}\Leftarrow\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

המשתנה החופשי הוא v_2, נציב $v_2=1$ ונקבל את הפתרון $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ וכל ווקטור מהצורה $\begin{pmatrix}-t\\ t\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המשוואה. סה"כ קיבלנו שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}-t\\ t\end{pmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}$ היא קבוצת כל הווקטורים העצמיים שמתאימים לערך עצמי $\lambda=-1$.

<u>סיכום</u>

כדי למצוא ערך עצמי כלומר סקלר λ שעבורו $Av=\lambda v$ יש לחשב את $|\lambda I-A|$ ולקבל את הפולינום האופייני $p(\lambda)$. לפתור את המשוואה $p(\lambda)=0$ ולקבל את הערכים העצמיים.

להציב כל אחד מהפתרונות שקיבלת במערכת המשוואות $Av=\lambda v$.

קבוצת הפתרון של המערכת הנ"ל נותן את כל הווקטורים העצמיים שמתאימים לערך עצמי שהצבת.

<u>תרגיל</u>

מצא את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

הפולינום האופייני הוא $(\lambda-2)^2(\lambda-3)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 1\\ 0 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=|\lambda I-A|$.

הערכים העצמיים הם $\lambda=2,\lambda=3$.

עבור $\lambda=2$ נקבל את קבוצת הווקטורים העצמיים (הקבוצה הנ"ל נקראת המרחב העצמי) $\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}$. עבור $\lambda=3$ נקבל את קבוצת הווקטורים העצמיים $\left\{t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}$.

<u>הגדרה</u>

מטריצה B דומה למטריצה A אם קיימת מטריצה לא סינגולארית P כך ש $B=P^{-1}AP$.

<u>דוגמא לשימוש</u>

נשים לב ש $B^n=\overbrace{\left(P^{-1}AP\right)\cdot\left(P^{-1}AP\right)\cdot\ldots\cdot\left(P^{-1}AP\right)}^{n-times}=P^{-1}A^nP$.

<u>הגדרה</u>

נאמר שמטריצה ריבועית A לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית D ז"א קיימת מטריצה לא סינגולארית P ומטריצה אלכסונית D כך ש $D=P^{-1}AP$.

<u>הערה</u>

אם A לכסינה אז ניתן לחשב את A^n באופן הבא:
$D=P^{-1}AP\Rightarrow A=PDP^{-1}\Rightarrow A^n=PD^nP^{-1}$ ומכיוון ש D מטריצה אלכסונית ניתן לחשב את D^n בקלות ולקבל את A^n .

<u>דוגמא</u>

חשב את A^{10} כאשר $A=\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}$.

נשים לב ש $P^{-1}\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}5&0\\0&-2\end{pmatrix}$ כאשר $P=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}$ ואז $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&\frac{1}{7}\\-\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\end{pmatrix}$.

נראה בתרגיל הבא כיצד להראות שמטריצה היא לכסינה ואם היא לכסינה כיצד ניתן לחשב את המטריצה ההפיכה P והמטריצה האלכסונית D .

$$\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}5&0\\0&-2\end{pmatrix}P^{-1}\Rightarrow A^{10}=P\begin{pmatrix}5^{10}&0\\0&(-2)^{10}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

<u>תרגיל</u>

הראה שהמטריצה $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ לכסינה ומצא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D שעבורן מתקיים השוויון $D=P^{-1}AP$.

<u>**פתרון**</u>

תחילה נמצא את הערכים העצמיים.

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2\\ -3 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+1)-6=\lambda^2-3\lambda-10=(\lambda-5)(\lambda+2)$$

הערכים העצמיים הם: $\lambda=5,\lambda=-2$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור הערך העצמי $\lambda=-2$.

ז"א יש למצוא את הבסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}-6 & -2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ שהוא $\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}\right\}$.

הבסיס של המרחב העצמי המתאים לערך העצמי $\lambda=5$ הוא הבסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ שהוא $\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$.

קיבלנו שני ווקטורי עצמיים בת"ל המטריצה היא 2 ריבועית ומכיוון שמספר הווקטורים העצמיים שהם בת"ל שווה לגודל המטריצה אז המטריצה ניתנת ללכסון. המטריצה האלכסונית D היא מטריצה שבאלכסון מופיעים הערכים העצמיים ז"א $\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ והמטריצה P היא המטריצה שעמודותיה הם הוקטורים העצמיים כלומר $P=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ הווקטור העצמי שמתאים לערך העצמי 5 נמצא בעמודה הראשונה מכיוון שבמטריצה האלכסונית הערך העצמי 5 מופיע בעמודה הראשונה באותו אופן ניתן להבין כיצד הגענו לעמודה השנייה.

<u>**שדה המספרים המרוכבים**</u>

נשים לב שלמשוואה $x^2=-1$ אין פתרון ממשי. מטרה להרחיב את שדה הממשיים כך שלמשוואה הנ"ל יהיה פתרון. נסמן פתרון למשוואה הנ"ל ב i וקבוצת המספרים המרוכבים היא הקבוצה $\{a+bi : a,b\in\mathbb{R}\}$.

לכל $z=a+bi\in\mathbb{C}$ נגדיר: $\mathrm{Re}(z)=a,\mathrm{Im}(z)=b,|z|=\sqrt{a^2+b^2},\bar{z}=a-bi$.

<u>**תרגיל**</u>

נתונים הביטויים: $(5+2i)+(2-3i),(5+2i)-(2-3i),(5+2i)\cdot(2-3i),(5+2i)\cdot(2-3i)^{-1}$.

עבור על אחד מהביטויים הנתונים:

א. חשב את הביטוי (כלומר הצג אותו בצורה $z=a+bi$).

ב. ציין מהם $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z),\bar{z},|z|$.

<u>**פתרון**</u>

א.

$$(5+2i)+(2-3i)=7-i$$
$$(5+2i)-(2-3i)=3+5i$$
$$(5+2i)\cdot(2-3i)=16-11i$$

כדי לחשב את $\frac{5+2i}{2-3i}$ נכפול את הביטוי ב $\frac{2+3i}{2+3i}$ כאשר $2+3i$ הוא המספר הצמוד של $2-3i$.

$$\frac{5+2i}{2-3i}=\frac{5+2i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{4+19i}{-5}=-\frac{4}{5}-\frac{19}{5}i.$$

ב. נראה רק עבור הביטוי הראשון $z=7-i$.

$$|z|=\sqrt{7^2+(-1)^2}=\sqrt{50},\bar{z}=7+i,\mathrm{Re}(z)=7,\mathrm{Im}(z)=-i.$$

<u>תכונות המספרים המרוכבים</u>

א. $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$.

ב. $|\mathrm{Re}(z)|\le|z|$.

ג. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

ד. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

ה. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

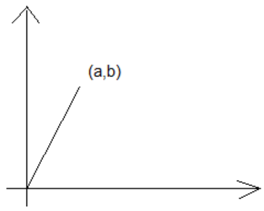
ו. $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2},\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

ז. אי שיוויון המשולש: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

ח. זהות המקבילית: $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\cdot\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

<u>קואורדינטות קוטביות</u>

נרשום כל נקודה במישור באמצעות המרחק מהראשית והזווית שהקטע המחבר את הנקודה עם ראשית הצירים יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה x.



נסמן את המרחק מהראשית ב r ואת הזווית ב θ.

נקבל ש

$$a=r\cos\theta\Leftarrow\cos\theta=\frac{a}{r}$$

$$b=r\sin\theta\Leftarrow\sin\theta=\frac{b}{r}$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\tan\theta=\frac{b}{a}$$

בצורה כזאת על מספר מרוכב $z=a+bi$ ניתן להציג באופן הבא:

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

<u>דוגמא</u>

נרשום את המספר $z=\sqrt{3}-3i$ ז"א יש להציג את הנקודה $\left(\sqrt{3},-3\right)$ בעזרת רדיוס וזווית.

$r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-3)^2}=\sqrt{12}$.

$\tan\theta=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$ ולכן $\theta=-60^0+180^0k$.

נשים לב שהנקודה נמצאת הרביע הרביעי ולכן $\theta=330^0$.

סה"כ נקבל ש $z=\sqrt{12}\left(\cos\left(330^0\right)+i\sin\left(330^0\right)\right)$.

<u>משפט דמואבר</u>

$\left(r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\right)^n=r^n\left(\cos\left(n\theta\right)+i\sin\left(n\theta\right)\right)$.

<u>תרגיל 1</u>

חשבו את $\left(1+\sqrt{3}i\right)^7$.

<u>פתרון</u>

נעבור לקואורדינטות קוטביות כדי להשתמש במשפט דמואבר.

$r=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\Leftarrow\theta=60^0+180^0k$ ומכיון שהנקודה נמצאת ברביע הראשון נקבל ש $\theta=60^0$.

$$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos60^0+i\sin60^0\right)$$

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^7=2^7\left(\cos\left(7\cdot60^0\right)+i\sin\left(7\cdot60^0\right)\right)=128\cdot\left(\cos60^0+i\sin60^0\right).$$

<u>תרגיל 2</u>

פתור את המשוואה $z^5=1$.

<u>פתרון</u>

נשים לב ש $1=\cos360^0k+i\sin360^0k$ כאשר k מספר שלם.

$z^5=\cos360^0k+i\sin360^0k\Leftarrow z_k=\cos72^0k+i\sin72^0k$ כאשר $0\le k\le4$.

סה"כ נקבל חמישה פתרונות למשוואה.

<u>מספרים מרוכבים – תרגול נוסף</u>

<u>תרגיל 1</u>

נתון הביטוי $A=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

א. הראה ש A הוא מספר ממשי טהור לכל n טבעי.

ב. נתון: k מספר טבעי, $n=3k$. הוכח: $A=2$.

<u>פתרון</u>

א. נשים לב ש $\bar{z}^n=\overline{z^n}$. נסמן $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ואז $A=z^n+\bar{z}^n=z^n+\overline{z^n}$ ומכיוון שמספר מרוכב ועוד הצמוד שלו נותן מספר ממשי נקבל ש A מספר ממשי.

ב. נחשב את z^3 .

$$z^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z^3=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1$$

ואז $z^{3k}=\left(z^3\right)^k=1^k=1$ ומכיוון ש $\bar{z}^n=\overline{z^n}$ נקבל גם ש $\bar{z}^{3k}=1$ ואז $A=2$.

<u>תרגיל 2</u>

נתון: $w=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

א. מצא את כל פתרונות המשוואה $z^3=w^3$. (הבע כל פתרון בצורה של *a + bi*).

ב. הראה שמכפלת הפתרונות של המשוואה הוא w^3.

ג. נסמן: $\bar{w}=A$, $w^3=B$. C נקודה על מעגל היחידה (C שונה מ –A, B). חשב את הזווית ACB.

<u>פתרון</u>

א. נחשב תחילה את w^3:

$$w^3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=i\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

כעת נפתור את המשוואה:

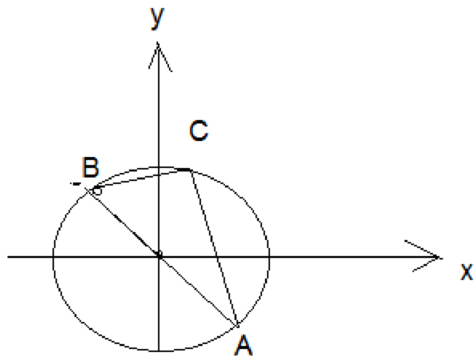
$$z^3=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$z^3=\cos 135^0+i\sin 135^0$$
$$z_k=\cos\left(45^0+120^0k\right)+i\sin\left(45^0+120^0k\right)$$
$$z_0=\cos 45^0+i\sin 45^0$$
$$z_1=\cos 165^0+i\sin 165^0$$
$$z_2=\cos 285^0+i\sin 285^0$$

ב. נשתמש בנוסחה

$$z_1=\cos\theta_1+i\sin\theta_1,\ z_2=\cos\theta_2+i\sin\theta_2$$
$$z_1\cdot z_2=\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)\cdot\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$$
$$z_1\cdot z_2=\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)$$

$$z_0\cdot z_1\cdot z_2=\left(\cos 45^0+i\sin 45^0\right)\cdot\left(\cos 165^0+i\sin 165^0\right)\cdot\left(\cos 285^0+i\sin 285^0\right)=$$
$$=\cos 495^0+i\sin 495^0=\cos 135^0+i\sin 135^0=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i=w^3$$

ג.



AB קוטר במעגל היחידה וזווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.

<u>סדרה הנדסית</u>

אם נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא a_1 ומנתה q אז $S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

<u>תרגיל 3</u>

נתונה הסדרה הנדסית $2+i,1+3i,\ldots$ חשב את סכום שלושה עשר האיברים הראשונים.

<u>פתרון</u>

נחשב תחילה את מנת הסדרה.

$$q=\frac{1+3i}{2+i}\Rightarrow q=\frac{(1+3i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i.$$

נחשב את q^{13}.

$$q^{13}=\left(q^2\right)^6\cdot q=\left((1+i)^2\right)^6\cdot(1+i)=(2i)^6\cdot(1+i)=-64-64i$$

$$S_{13}=\frac{(2+i)(1+64+64i)}{-i}=\frac{66+193i}{-i}=-193+66i.$$