תרגיל 7

שאלה 1

הוכח או הפרך :

א. אם $f(x)+g(x)$ רציפה ב- x_0 אז גם $f(x),g(x)$ רציפות ב- x_0.

ב. אם $f(x)$ רציפה ב- x_0 ו- $g(x)$ אינה רציפה ב- x_0 אזי $f(x)+g(x)$ אינה רציפה ב- x_0.

ג. אם $f(x)$ רציפה ב- x_0 ו- $g(x)$ אינה רציפה ב- x_0 אזי $f(x)\cdot g(x)$ אינה רציפה ב- x_0.

פתרון:

א) הטענה אינה נכונה

דוגמה נגדית:

$$f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ -1+x & x\geq 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ -1+x & x\geq 0\end{cases}$$

שתי הפונקציות אינן רציפות ב־0 אבל הסכום שלהן $2x$ כן רציפה שם

ב) הטענה נכונה

נניח בשלילה ש־$f(x)+g(x)=h(x)$ רציפה ב־x_0 אזי $g(x)=h(x)-f(x)$ תהיה רציפה , סתירה

ג) הטענה אינה נכונה,

דוגמה נגדית:

$f(x)=0$ בכל x ממשי והיא גם רציפה בנקודה 0

$g(x)=\begin{cases}1 & x\leq 0\\ -1 & x>0\end{cases}$ אינה רציפה ב־0, אבל המכפלה $f(x)\cdot g(x)=0$ כל רציפה ב־$x=0$

שאלה 2

מצאו את קבוצות כל הנקודות בהן הפונקציות הבאות רציפות:

א. $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)(x-3)^{1/3}}$

פתרון: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ בתחום זה הפונקציה רציפה כמכפלה ומנה של פונקציות רציפות.

ב. $f(x)=\sqrt[4]{x^2-x^3}$

פתרון: $x^2-x^3\ge 0 \Leftrightarrow x^2(1-x)\ge 0 \Leftrightarrow x\le 1$, כלומר $D(f)=(-\infty,1]$ ובתחום זה הפונקציה רציפה כשורש של פונקציה אי שלילית רציפה.

אפשר גם להגיד שהפונקציה רציפה כהרכבה של שתי פונקציות רציפות:

$g(x)=x^2-x^3\ge 0 \quad \forall x\in(-\infty,1]$ ו- $h(x)=\sqrt[4]{x}$. $f(x)=(h\circ g)(x)$

ג. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} & x\ge 2, x\ne 4\\[2mm] \dfrac{2}{3} & x=4\end{cases}$

פתרון: $D(f)=[2,\infty)$. לכל $x\in[2,4)\cup(4,\infty)$ הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק האם הפונקציה רציפה ב- $x=4$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=st\left(\frac{2\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{9+2\Delta x}+3}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

כאשר $\Delta x\ne 0$, $\Delta x\approx 0$, $x=4+\Delta x$.

קיבלנו $\lim\limits_{x\to 4}f(4)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\ne\dfrac{2}{3}=f(4)$ ולכן $x=4$ נקודת אי רציפות סליקה.

שאלה 3

מיינו נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות וקבעו את סוג אי הרציפות:

א. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

פתרון: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. בכל תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק את סוג אי הרציפות ב- $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$$

(קיבלנו מספר אינפיניטסימלי חלקי מספר סופי שאינו אינפיניטסימלי ולכן הגבול אפס).

הגבול קיים, אך הפונקציה לא מוגדרת בנקודה ולכן $x=0$ נקודת **אי רציפות סליקה**.

ב. $f(x)=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

פתרון: $D(f)=[-7,\infty)\setminus\{-2,2\}$. בכל תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כהרכבה ומנה של פונקציות רציפות

נקודות אי רציפות הן $x=\pm 2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{7+x-9}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\frac{1}{24}$$

הגבול קיים וסופי ולכן $x=2$ נקודת **אי רציפות סליקה**.

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{7+x}-3}{(x-2)(x+2)}=st\left(\frac{\sqrt{5+\vartriangle x}-3}{\vartriangle x\left(-4+\vartriangle x\right)}\right)$$

כאשר $\vartriangle x>0,\ \vartriangle x\approx 0,\ x=-2+\vartriangle x$. במקרה זה המספר $\frac{\sqrt{5+\vartriangle x}-3}{\vartriangle x\left(-4+\vartriangle x\right)}$ הינו מספר אינסופי ולכן החלק הסטנדרטי שלו לא מוגדר ולכן הגבול מימין בנקודה $x=-2$ אינו קיים

ולכן $x=-2$ נקודת **אי רציפות מסוג שני**.

שאלה 4

עבור איזה ערך של a פונקציה הבאה תהיה רציפה בנקודה $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases}5x+2 & x\le 0\\ \frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2} & x>0\end{cases}$$

פתרון:

נשים לב שהפונקציה רציפה בכל $x\neq 0$.

נבדוק רציפות בנקודה $x=0$, נרצה שיתקיים:

$$lim_{x\to 0^+}f(x)=lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=2$$

$$lim_{x\to 0^-}f(x)=lim_{x\to 0^-}(5x+2)=2$$

$$lim_{x\to 0^+}f(x)=lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2}\right)=lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2}\frac{\sqrt{1+ax^2}+1}{\sqrt{1+ax^2}+1}\right)=$$

$$=lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2}{x^2(\sqrt{1+ax^2}+1)}=\frac{a}{2}$$

ולכן כדי שהגבול יהיה קיים נדרוש ש־$\frac{a}{2}=2$ ולכן $a=4$.

שאלה 5

האם הפונקציה הבאה רציפה ב- $x=-5$? האם היא גזירה בנקודה זו?

$$f(x)=\begin{cases}e^{x+5} & ,x>-5\\ 5x+26 & ,x\le -5\end{cases}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to -5^+} f(x)=\lim_{x\to -5^+} e^{x+5}=st\left(e^{\vartriangle x}\right)=1,\ x=-5+\vartriangle x,\ \vartriangle x\approx 0,\ \vartriangle x>0$$

$$\lim_{x\to -5^-} f(x)=\lim_{x\to -5^-} \cos(x+5)=st\left(\cos(\vartriangle x)\right)=1,\ x=-5+\vartriangle x,\ \vartriangle x\approx 0,\ \vartriangle x<0$$

כלומר $\lim_{x\to -5^+} f(x)=\lim_{x\to -5^-} f(x)=1=f(-5)$ ולכן הפונקציה רציפה ב-$x=-5$.

נבדוק האם הפונקציה גזירה ב-$x=-5$:

$$\lim_{\vartriangle x\to 0^+}\frac{f(-5+\vartriangle x)-f(-5)}{\vartriangle x}=\lim_{\vartriangle x\to 0^+}\frac{e^{\vartriangle x}-1}{\vartriangle x}=1$$

$$\lim_{\vartriangle x\to 0^-}\frac{f(-5+\vartriangle x)-f(-5)}{\vartriangle x}=\lim_{\vartriangle x\to 0^-}\frac{\cos\vartriangle x-1}{\vartriangle x}=\lim_{\vartriangle x\to 0^-}\frac{\cos\vartriangle x-\cos 0}{\vartriangle x}=(\cos x)'\Big|_{x=0}=-\sin 0=0$$

כלומר הגבולות החד צדדיים שונים ולכן הגבול $\lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{f(-5+\vartriangle x)-f(-5)}{\vartriangle x}$ לא קיים ולכן הפונקציה אינה גזירה בנקודה $x=-5$.

תרגיל 6

חשב את הגבולות הבאים בעזרת כללים (אריתמטיקה של גבולות, רציפות, כפל בצמוד וכו')

1) $lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+x}$

פתרון:

$$lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+x}=lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$$

2) $lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

פתרון:

$$lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=lim_{x\to 0}\frac{x^2+9-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\frac{1}{9}$$

3) $lim_{x\to 1}\frac{sin(x)ln(x+1)}{x^2-4}$

פתרון:

הפונקציה רציפה בנקודה $x=1$ ולכן הגבול שלה שווה לערך שלה בנקודה, הציבו את הנקודה וקבלו את הגבול.