הצעה לפתרון מבחן 2011 מועד ב'

13 בפברואר 2015

שאלה 1

להלן שתי תתי־קבוצות של $\mathbb{P}^2_{\bar{w}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{u}}$:

$$\begin{aligned} S &= \left\{(\bar{w},\bar{u}) \in \mathbb{P}^2_{\bar{w}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{u}} \mid u_0w_1 - w_0u_1 = 0\right\} \\ T &= \mathbb{P}^2_{\bar{w}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{u}} \backslash S \end{aligned}$$

עבור הקבוצות S ו־T ענו על השאלות הבאות:

1. האם הן יריעות אפיניות?
2. האם הן יריעות פרויקטיביות?

פתרון

ניעזר בקונסטרוקציה של Segre. לפיה, קיים מורפיזם $\varphi : \mathbb{P}^2_{\bar{w}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{u}} \to \mathbb{P}^5_{\bar{t}}$,

$$((w_0 : w_1 : w_2), (u_0 : u_1)) \mapsto (w_0u_0 : w_0u_1 : w_1u_0 : w_1u_1 : w_2u_0 : w_2u_1)$$

והתמונה מקיימת את המשוואות $t_{ij}t_{k\ell} = t_{i\ell}t_{kj}$ (כאשר $\bar{t} = (\cdots : t_{ij} : \dots)$).

התמונה של S מקיימת את המשוואה ההומוגנית $t_2 - t_1 = 0$, יחד עם המשוואות מהמורפיזם (שהן הומוגניות), ולכן בסך הכל $\varphi(S)$ פרויקטיבית, ולכן S יריעה פרויקטיבית. היא מכילה יותר מנקודה אחת, ולכן היא אינה אפינית.

לגבי T: אני חושב שהיא אפינית, אבל אנחנו לא צריכים לדעת את זה (כמו במועד א', שאלה 3), כי היא הפרש של יריעה פרויקטיבית עם hypersurface (כי S היא תת־קבוצה של $\mathbb{P}^2_{\bar{w}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{u}}$ עם עוד משוואה אחת).

שאלה 2

זהה לשאלה 2 במועד א'.

שאלה 3

לכל נקודה $\bar{t} \in \mathbb{P}^5_{\bar{t}}$ נגדיר קוניקה $C_{\bar{t}}$ על ידי

$$C_{\bar{t}} = \left\{\bar{w} \in \mathbb{P}^2_{\bar{w}} \mid t_0w_0^2 + t_1w_1^2 + t_2w_2^2 + t_3w_0w_1 + t_4w_0w_2 + t_5w_1w_2 = 0\right\}$$

יהי L הקו הישר העובר דרך הנקודות $A=(0:1:0)$ ו־$B=(1:0:1)$. תהי $U\subseteq\mathbb{P}^5_{\bar{t}}$ הקבוצה של כל הנקודות $\bar{t}\in\mathbb{P}^5_{\bar{t}}$ כך שהקוניקה $C_{\bar{t}}$ כוללת את L.

1. מצא את U.
2. האם U היא יריעה פרויקטיבית?

פתרון

כמו במועד א' (אותו ישר), המשוואה של L היא $L: w_0=w_2$. החיתוך $C_{\bar{t}}\cap L$ מקיים את המשוואה:

$$\left(t_0+t_2+t_4\right)w_0^2+\left(t_3+t_5\right)w_0w_1+t_1w_1^2=0$$

רוצים שזה יהיה נכון לכל w_0,w_1 (כך שלא שניהם 0 ביחד). לכן כל המקדמים חייבים להתאפס, כלומר

$$\begin{cases} t_0+t_2+t_4=0 \\ t_3+t_5=0 \\ t_1=0 \end{cases}$$

כלומר,

$$U=\left\{\bar{t}\in\mathbb{P}^5_{\bar{t}}\mid t_0+t_2+t_4=0,t_3+t_5=0,t_1=0\right\}$$

זו קבוצה פרויקטיבית, כי היא מוגדרת על ידי משוואות הומוגניות מדרגה 1.

שאלה 4

לא בחומר ☺

שאלה 5

מצא את החוג $\mathbb{C}\left[X\right]$ של פונקציות רציונליות ורגולריות על X, כאשר

$$X=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4\mid xyz-t^2=0\right\}$$

פתרון

X היא קבוצה אפינית, כי היא אוסף הפתרונות של משוואה פולינומיאלית. לכן,

$$\mathbb{C}\left[X\right]=\mathbb{C}\left[x,y,z,t\right]/I\left(X\right)$$

נשים לב כי $I\left(X\right)=\left\langle xyz-t^2\right\rangle$, ולכן

$$\mathbb{C}\left[X\right]=\mathbb{C}\left[x,y,z,t\right]/\left\langle xyz-t^2\right\rangle$$

נחשב את המנה לפי השלבים הבאים:

1. כל צמצום של פולינום $p(x,y,z,t)$ על X ייתן פולינום מהצורה

$$p_1(x,y,z)+t\cdot p_2(x,y,z)$$

שכן בחוג המנה, $t^2=xyz$.

2. כל מחלקת שקילות של פולינומים בחוג המנה מכילה רק פולינום אחד מהצורה הזו; אכן, אם על X מתקיים

$$p_1(x,y,z)+t\cdot p_2(x,y,z)=q_1(x,y,z)+t\cdot q_2(x,y,z)$$

אזי

$$(\star)\quad p_1-q_1=t(q_2-p_2)$$

נפצל לשני מקרים:

(א) אם $q_2-p_2\not\equiv 0$ על X, יש הצבה כלשהי שעבורה $(q_2-p_2)(x_0,y_0,z_0)\neq 0$; אז קיבלנו ב־$X$ נקודה יחידה

$$\left(x_0,y_0,z_0,\frac{(p_1-q_1)(x_0,y_0,z_0)}{(q_2-p_2)(x_0,y_0,z_0)}\right)$$

המתאימה ל־x_0,y_0,z_0 הנתונים; אבל, לפי המשוואה, יכולנו גם להחליף את ערך ה־t בנגדי שלו, ונקבל סתירה.

(ב) אם $q_2-p_2\equiv 0$ על X, גם $p_1-q_1\equiv 0$ על X. לפי ה־Nullstellensatz של הילברט, בגרסה החלשה, קיימת חזקה $k\in\mathbb{N}$ שעבורה

$$(p_1-q_1)^k=\left(xyz-t^2\right)h$$

עבור פולינום $h\in\mathbb{C}[x,y,z,t]$. אבל זה לא ייתכן, כי p_1-q_1 אינו תלוי ב־t.

3. גם סכום ומכפלה של כל שני פולינומים הצורה הנ"ל נותרת בחוג המנה.

לסיכום,

$$\mathbb{C}[x]=\{p_1(x,y,z)+t\cdot p_2(x,y,z)\mid p_1,p_2\in\mathbb{C}[x,y,z]\}$$

הערה: ייתכן ששלב 2 נראה מיותר. פשוט עקבתי אחר התהליך שהציגה פרופ' בנדמן בקובץ שלה עם פתרונות לשאלות (שאלה 6). הקישור:
http://u.math.biu.ac.il/~bandman/Course525/shiur-hazara.pdf