פתרון תרגיל בית 9 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו שכל מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי.

ב. יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש- $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \varnothing$.

פתרון

א. יהי X מ"ט קומפקטי ודיסקרטי אזי $\{\{x\}: x\in X\}$ כיסוי פתוח של X ובשל הקומפקטיות קיים לו תת כיסוי סופי. מכאן נקבל ש- X סופי.

בכיוון ההפוך הטענה נכונה גם ללא הנחת הדיסקרטיות. יהי (X,τ) סופי אזי $|\tau|\leq|P(X)|=2^{|X|}<\infty$ ומכאן קל להסיק כי לכל כיסוי פתוח קיים תת כיסוי סופי שכן מספר הקבוצות הפתוחות (איברי τ) הוא סופי.

ב. יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. נוכיח כי $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \varnothing$. נניח בשלילה כי $\bigcap_{i\in I} K_i = \varnothing$. על-פי דה-מורגן נקבל:

$\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} K_i^{\,c} = \varnothing^c = X$. מכיון שבנוסף $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף סגורות הרי ש- $\{K_i^{\,c}\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X. נתון ש- X קומפקטי ולכן קיימים $i_1,\dots,i_n$ כך ש $\bigcup_{m=1}^{n}\left(K_{i_m}\right)^c = X$. נשתמש שוב בכלל דה-מורגן ונקבל $\bigcap_{m=1}^{n} K_{i_m} = \varnothing$ ומצאנו חיתוך סופי ריק של קבוצות מהאוסף $\{K_i\}_{i\in I}$, בסתירה לנתון.

שאלה 2

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. יהיו $A_1,...,A_n$ תת-מרחבים קומפקטיים של X. הוכיחו ש- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ הוא קומפקטי.

ב. מצאו דוגמה נגדית כאשר מדובר באינסוף תת-מרחבים קומפקטיים.

ג. יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $\{F_i\}_{i\in I}$ אוסף כלשהו של תת-מרחבים קומפקטיים. הוכיחו כי $\bigcap_{i\in I} F_i$ קומפקטי.

פתרון

א. יהיו $A_1,...,A_n$ תתי מרחבים קומפקטיים של X. נראה כי $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ הינו קומפקטי. יהי $\{U_j\}_{j\in J}$ כיסוי פתוח ל- A ב- X, כלומר: $A\subseteq\bigcup_{j\in J} U_j$. לכל $1\le i\le n$ $A_i\subseteq A\subseteq\bigcup_{j\in J} U_j$ קומפקטי ולכן קיימת תת-קבוצה סופית $F_i\subseteq J$ כך ש $A_i\subseteq\bigcup_{j\in F_i} U_j$. תהי $F=\bigcup_{i=1}^{n} F_i$. אזי F תת קבוצה סופית של J כאיחוד של מספר סופי של קבוצות סופיות ומתקיים $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i\subseteq\bigcup_{j\in F} U_j$. מצאנו תת כיסוי סופי ומכאן $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ קומפקטי.

ב. ניקח X אינסופי עם טופולוגיה דיסקרטית. הוא לא קומפקטי אבל ניתן להשיג אותו כאיחוד הנקודונים שכל אחד מהם כן קומפקטי.

ג. F_i קומפקטי לכל $i\in I$. X האוסדורף ולכן F_i סגורה ב- X לכל $i\in I$. לכן $A=\bigcap_{i\in I} F_i$ סגורה ב- X. יהי $i_0\in I$ ומתקיים $A\subseteq F_{i_0}$, לכן $A=\bigcap_{i\in I} F_i$ סגורה גם ב- F_{i_0}. מכיון ש- F_{i_0} קומפקטי ו- A ת"מ סגור שלו נקבל ש- $A=\bigcap_{i\in I} F_i$ ת"מ קומפקטי.

<u>שאלה 3</u>

תהי $f:X\to Y$ פונקציה חח"ע ועל.

א. הוכיחו שאם f פתוחה או סגורה ואם X הוא האוסדורף אזי Y הוא האוסדורף.

ב. הוכיחו שאם f רציפה ו- Y האוסדורף, אזי X האוסדורף.

<u>פתרון</u>

א. נוכיח קודם טענת עזר:

<u>טענה</u>:

תהי $f:X\to Y$ חח"ע ועל, אזי f פתוחה אמ"מ f סגורה.

<u>הוכחת טענת עזר</u>:

$f:X\to Y$ חח"ע ועל ולכן לפי שאלה 2 בתרגיל 1 (הסתכלו בפתרון) לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f\left(A^C\right)=\left(f\left(A\right)\right)^C$. כעת נניח ש- f פתוחה ונראה ש- f סגורה. תהי $A\subseteq X$ סגורה אזי A^C פתוחה ב- X ומכיון ש- f פתוחה נקבל ש-$f\left(A^C\right)$ פתוחה. אבל $f\left(A^C\right)=\left(f\left(A\right)\right)^C$ ומכאן $\left(f\left(A\right)\right)^C$ פתוחה ולכן $f\left(A\right)$ סגורה. קיבלנו ש- f סגורה. באופן דומה מוכיחים שאם f סגורה אז f פתוחה (תחת ההנחה ש- f חח"ע ועל).

מש"ל

נחזור להוכחת התרגיל. על-פי טענת העזר אפשר להניח ש- f פתוחה. כדי להוכיח ש- Y האוסדורף ניקח $y_1\neq y_2\in Y$. הפונקציה $f:X\to Y$ היא על ולכן קיימים $x_1\neq x_2\in X$ כך ש- $f\left(x_1\right)=y_1,\ f\left(x_2\right)=y_2$. X האוסדורף ולכן קיימות U סביבה של x_1, V סביבה של x_2 כך ש- $U\cap V=\varnothing$. בשל העובדה ש- f פתוחה נקבל ש- $f\left(U\right),f\left(V\right)$ סביבות של y_1,y_2 בהתאמה.

לבסוף נראה כי $f\left(U\right),f\left(V\right)$ זרות. אמנם, נניח בשלילה ש- $f\left(U\right)\bigcap f\left(V\right)\neq\varnothing$ אזי $\exists z\in f\left(U\right)\bigcap f\left(V\right)$. לכן, קיימים $x\in U,\ y\in V$ כך ש-

$f(x)=f(y)=z$. אבל f חח"ע ומכאן $x=y\in U\cap V$. בסתירה לכך ש-
$U\cap V=\varnothing$. מצאנו את ההפרדה הדרושה ומכאן Y האוסדורף.

ב. יהיו $x_1\neq x_2\in X$. f חח"ע ומכאן $f(x_1)\neq f(x_2)\in Y$. Y האוסדורף ולכן
קיימות U,V סביבות זרות של $f(x_1),f(x_2)$ בהתאמה. f רציפה ולכן
$f^{-1}(U),f^{-1}(V)$ סביבות של x_1,x_2 והן זרות שכן
$f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cap V)=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$.
שימו לב: סעיף ב' נכון גם אם f אינה על (שימו לב שאכן לא נעזרנו בנתון זה בהוכחה).

<u>שאלה 4</u>

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף של תת-מרחבים קומפקטיים לא ריקים כך שמתקיים $E_1\supseteq E_2\supseteq E_3\supseteq\ldots$. הוכיחו ש-$\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\neq\varnothing$.

תנו דוגמה נגדית למקרה שהתת-מרחבים אינם קומפקטיים.

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה ש-$\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\varnothing$. מתקיים $E_1\subseteq X=X\setminus\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(X\setminus E_i)$. נתון ש-$E_i$ הם תת-מרחבים קומפקטיים, ולכן כקבוצות, E_i הן תת-קבוצות סגורות. מכאן $\{X\setminus E_i\}_{i=1}^{\infty}$ הוא כיסוי פתוח של E_1. מכיוון ש-E_1 קומפקטי, קיים תת-כיסוי סופי: $E_1\subseteq X\setminus E_{i_1}\cup X\setminus E_{i_2}\cup\ldots\cup X\setminus E_{i_k}$, כאשר בה"כ $E_{i_1}\supseteq E_{i_2}\supseteq\ldots\supseteq E_{i_k}$. לכן, $X\setminus E_{i_1}\subseteq\ldots\subseteq X\setminus E_{i_k}$ ומכאן $E_1\subseteq X\setminus E_{i_k}$ וזו סתירה לכך ש-$E_1\supseteq E_{i_k}\neq\varnothing$.

דוגמה נגדית: למשל ב-$\mathbb{R}$ ניתן לקחת את $E_i=\left(0,\frac{1}{i}\right)$ או את $E_i=[i,\infty)$.

שאלה 5

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת-מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו ש-(X,τ) אינו האוסדורף.

ב. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפקטי. הוכיחו שקיים ב- X מספר לא בן מניה של תת-מרחבים קומפקטיים ומספר לא בן מניה של תת-מרחבים לא קומפקטיים.

ג. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, כך שכל תת-מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו ש-(X,τ) קומפקטי.

פתרון

א. נניח בשלילה ש-(X,τ) הוא האוסדורף. כל תת-מרחב הוא קומפקטי ולכן סגור. לכן τ היא הטופולוגיה הדיסקרטית. ראינו שמ"ט דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי. שימו לב ש- X הוא קומפקטי ודיסקרטי ולכן סופי, בסתירה לנתון.

ב. תת-מרחבים קומפקטיים: כל הנקודונים. ברור שיש מספר לא בן מניה של נקודונים.

תת-מרחבים לא קומפקטיים: כל המרחבים מהצורה $X\setminus\{x\}$. ברור שיש מספר לא בן מניה של מרחבים כאלה. נראה מדוע הם לא קומפקטיים. נניח בשלילה ש-$X\setminus\{x\}$ קומפקטי. מכיוון שגם $\{x\}$ קומפקטי, נקבל ש-$X=(X\setminus\{x\})\cup\{x\}$ קומפקטי (תרגיל 4 א' בקובץ הנוכחי), בסתירה לנתון.

ג. יהי $\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X ונמצא תת-כיסוי סופי. נבחר את אחת הקבוצות הלא ריקות מהכיסוי U_{i_0} (אם כולן ריקות, אז גם X ריקה ולכן הטענה ברורה). אם $U_{i_0}=X$ סיימנו. אחרת המשלים $X\setminus U_{i_0}$ הוא סגור ולא טריוויאלי ולכן קומפקטי. $\{U_i\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של $X\setminus U_{i_0}$ ב- X ולכן קיים לו תת-כיסוי סופי: $\{U_{i_j}\}_{j=1}^{n}$. נקבל ש- $X=U_{i_o}\cup\left(\bigcup_{j=1}^{n}U_{i_j}\right)$.