0707-1

7/7/2020

הרצאה 2

תזכורת קצרה:

$$\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1m}x_m = b_1$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{nm}x_m = b_m$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} & b_m \end{array}\right]$$

אלג' גאוס: מטריצה ← צורה מדורגת קנונית

מדורגת: שורות אפסים למטה, כל אבר מוביל נמצא מימין לאבר המוביל שמעליו.

מדורגת קנונית: כל האיברים המובילים $=1$, מעל כל אבר מוביל יש אפסים.

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & x & 0 & x & \cdots & x & 0 & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & x & \cdots & x & 0 & & & \\ & & & & 0 & & & 0 & 1 & x & x & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & 0 & & & \\ & & & & & & & & \vdots & & & \\ 0 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

שורת סתירה ← אין פתרון

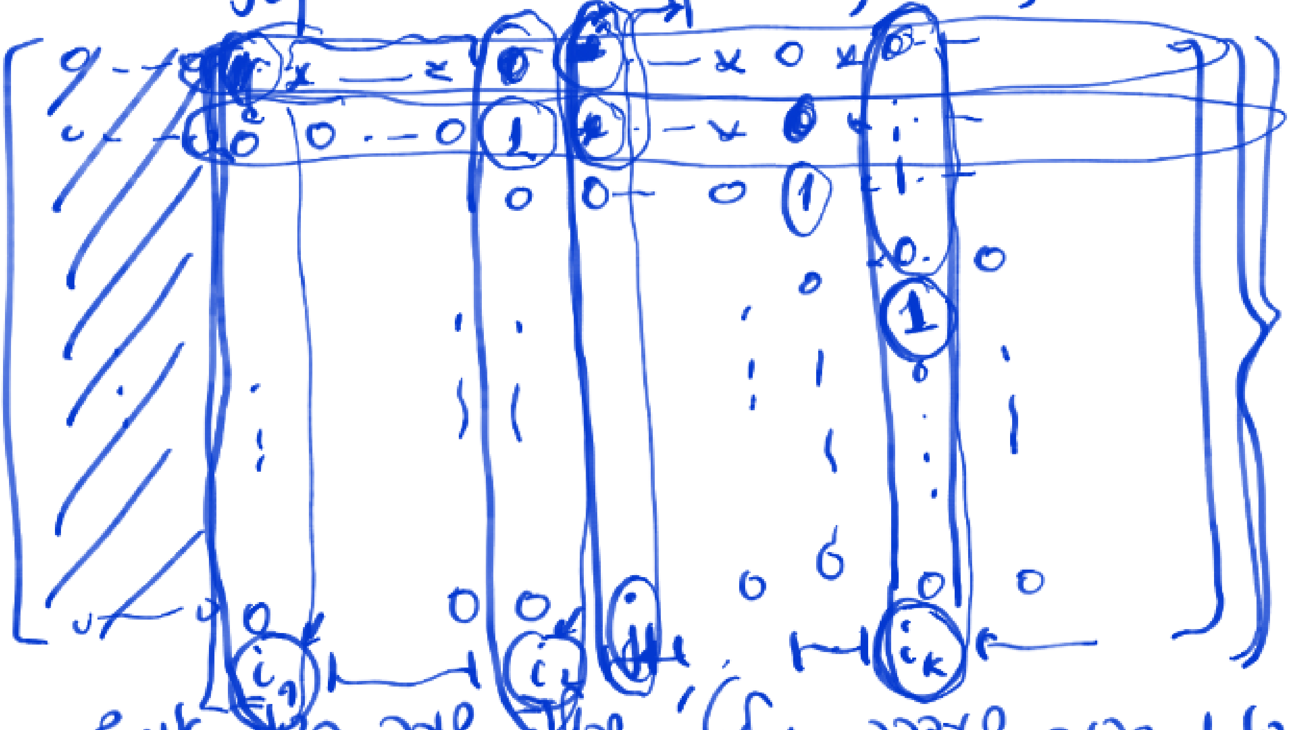
האם יש משתנים חופשיים?

כן: אינסוף (R,①)

אחרת: יש פתרון יחיד

משפט: הצורה המדורגת הקנונית היא יחידה.

הוכחה: נניח בשלילה כי לפנינו שתי מטריצות A,B שקולות שורה [השגנו מאחת לשנייה באמצעות פעולות דירוג אלמנטריות], שתיהן בצורה מדורגת קנונית.



הוכחנו בפעם שעברה כי למט' שקולות שורה בדיוק אותם המשתנים החופשיים [ולכן גם אותם המשתנים התלויים].

בנוסף, ראינו כי למט' שקולות שורה בדיוק אותם פתרונות.

נניח $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ הם המשתנים התלויים.

לפיכך העמודות:

$$C_{i_1}(A) = C_{i_1}(B)$$
$$\vdots$$
$$C_{i_k}(A) = C_{i_k}(B)$$

[$C_i(A)$ = העמודה ה-i-ית של A]

נותר לטפל בעמודות המתאימות למשתנים החופשיים.

יהי x_j משתנה חופשי. נניח:

משמאל $\underbrace{x_{i_1},\dots,x_{i_r}}_{}$ $(i_1,\dots,i_r<j)$

מימין $x_{i_{r+1}},\dots,x_{i_k}$ $(i_{r+1},\dots,i_k>j)$

נסמן:

$$C_j(A)=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$$C_j(B)=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

נקבע $\underline{\underline{x_l=0}}$ לכל משתנה חופשי $x_l\neq x_j$.

ועבור j נקבע $x_j=-1$.

בהתאם לכך, נקבע פתרון יחיד למשתנים התלויים, ונראה שהוא שווה בין A ו-B (כי הן שקולות).

נחשב את הפתרון:

(המשוואות הראשונות)

$$1\cdot x_{i_1}+0+\dots+0+\alpha_1\cdot x_j+0+\dots+0=0$$

$$1\cdot x_{i_2}+0+\dots+0+\alpha_2\cdot x_j+0+\dots+0=0$$

$$\vdots$$

$$1\cdot x_{i_r}+\dots+0+\alpha_r\cdot x_j+0+\dots+0=0$$

$$\Downarrow$$

$$x_{i_1}+\alpha_1\overbrace{x_j}^{-1}=0 \quad\Longrightarrow\quad x_{i_1}=\alpha_1$$

$$\vdots$$

$$x_{i_r}+\alpha_r\overbrace{x_j}^{-1}=0 \quad\Longrightarrow\quad x_{i_r}=\alpha_r$$

נזכיר שהפתרון למשתנים התלויים $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$, שהוא זהה בין A ו-B שווה ל- $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

ניתן לבדוק ע"י אותו שיקול עבור B:

נקבל כי הפתרון (אותו כמובן) יהיה: $\beta_1, \ldots, \beta_r$.

מכיוון שלמטר' שקולות יש אותו פתרון, נקבל כי

$$\alpha_1 = \beta_1$$
$$\vdots$$
$$\alpha_r = \beta_r$$

כלומר: $c_j(A) = c_j(B)$.

לסיכום, הראינו כי לכל i עם ש-x_i משתנה תלוי, מתקיים:

$$c_i(A) = c_i(B)$$

וגם, לכל j כך ש-x_j משתנה חופשי מתקיים:

$$c_j(A) = c_j(B).$$

לסיכום, כל עמודות המטריצה שוות זו לזו, בהתאמה. כלומר, $A = B$.

מ.ש.ל.

אלגברת המטריצות

סימון: נסמן ב- $\mathbb{F}^{n \times m}$ או $M_{n \times m}(\mathbb{F})$ את אוסף המטריצות עם מקדמים ב-$\mathbb{F}$ בעלות n שורות, m עמודות

2x2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}) \qquad \mathbb{F}$$

$$A \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{F})$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 1}$$

נאמר כי שתי מט' $\in \mathbb{F}^{n\times m}$ שוות זו לזו, אם כל הרכיבים שווים זה לזה.

$A \in \mathbb{F}^{n\times m} \rightsquigarrow A_{ij} =$ המקדם בשורה ה-i ובעמודה ה-j

<u>פעולות על מטריצות</u>:

1) <u>חיבור</u> – אם $A,B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ נגדיר $A+B$:

$$[A+B]_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$$

$$A: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2) <u>כפל בסקלר</u> – אם $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ ו- $\alpha \in \mathbb{F}$:

$$[\alpha A]_{ij} := \alpha \cdot A_{ij}$$

$$\alpha = 5, \quad \alpha A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$$

<u>סימון סכום</u>:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(2^{7i+3}\right) = 2^{7\cdot 1+3} + 2^{7\cdot 2+3} + \dots + 2^{7\cdot n+3}$$

3) כפל מטריצות:

יהיו $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times r}$. נגדיר:

מטריצה $A\cdot B \in \mathbb{F}^{n\times r}$

לכל $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$:

$$\boxed{[A\cdot B]_{ij} := \sum_{k=1}^{m} A_{ik}\cdot B_{kj}}$$

דוגמה:

① $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{2} A_{1k}\cdot B_{k1} = A_{11}\cdot B_{11} + A_{12}\cdot B_{21}$$

$$\sum_{k=1}^{2} A_{1k}\cdot B_{k2} = A_{11}\cdot B_{12} + A_{12}\cdot B_{22}$$

② $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{2\times 1} = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = 11$$

③ $$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$$

2×1

<u>הגדרה</u>: לכל מט' $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$ ולכל <u>וקטור</u> $v\in \mathbb{F}^{n\times 1}$ מתקיים:

$$A\cdot v\in \mathbb{F}^{n\times 1}$$

לכל וקטור <u>שורה</u> $w\in \mathbb{F}^{1\times n}$:

$$w\cdot A\in \mathbb{F}^{1\times n}.$$

<u>תכונות אלגבריות המטריצות</u>: $+,\cdot$ $\quad M_{n\times n}(\mathbb{F})$

$\cancel{M_{2\times 3}(\mathbb{F})}$

1 - <u>סגירות</u>: ל- $+,\cdot$

2 - <u>חילופיות</u>: לחיבור:

$$[A+B]_{ij}=A_{ij}+B_{ij}=B_{ij}+A_{ij}=[B+A]_{ij}$$

<u>לכפל</u> - לא:

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\neq$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$$

3 - <u>אסוציאטיביות</u>: לחיבור - ברור.

לכפל: $\underline{(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)}$ (נניח כולן $n\times n$)

<u>הוכחה</u>: לכל i,j:

$$[(AB)C]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(AB)_{ik}C_{kj}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{n}A_{il}B_{lk}\Big)\cdot C_{kj}=$$

$\in\mathbb{F}\quad \in\mathbb{F}\quad \in\mathbb{F}$

$$=\Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_{il}B_{lk}C_{kj}\Big)$$

מצד שני:

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(BC)_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} B_{kl}C_{lj}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_{ik}B_{kl}C_{lj}$$

קיבלנו אותו ביטוי לכל i,j (בקיצור לכל k,l) לכן $(AB)C = A(BC)$.

4 - דיסטריבוטיביות: $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

$$[A(B+C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B+C)_{kj} =$$

הגדרת + לכפל

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj}+C_{kj}) =$$

דיסטריבוטיביות בשדה.

$$= \sum_{k=1}^{n}(A_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj}) =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\right)}_{[AB]_{ij}} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{kj}\right)}_{[AC]_{ij}} =$$

מהגדרת + מטריצות

$$= [AB+AC]_{ij}$$

כלומר, $A(B+C) = AB+AC$, כנדרש.

5- נגדי (+)

$$[-A]_{ij} := -A_{ij}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}$$

זהו איבר ה-0, נייטרלי לחיבור.

נייטרלי לכפל:

$$F^{n\times n} \ni I_n = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad I_{1,1} = 1,\ I_{2,2} = 1, \ldots$$

הוכחה:

$$[A\cdot I]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} I_{kj}$$

$$I_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{אם } k \neq j \\ 1 & \text{אם } k = j \end{cases}$$

$$\underbrace{A_{i1}I_{1j} + \cdots}_{0} + A_{ij}\underbrace{I_{jj}}_{1} + \underbrace{\cdots + A_{in}I_{nj}}_{0}$$

$$= A_{ij}$$

לכן $A\cdot I = A$, כנדרש.

בדומה, ניתן להוכיח כי $I\cdot A = A$.

$A \in F^{n\times m}$, $I_n \cdot A = A$

6. A^{-1}? לא תמיד!

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^{n\times n}$$

מחלק אפס!

$$A\cdot B=0$$

אם היה קיים A^{-1}, אז

$$A^{-1}(AB)=A^{-1}\cdot 0=0$$

$$(A^{-1}A)\cdot B=I\cdot B=B\neq 0$$

לכן, לא כל מטריצה [ריבועית] היא הפיכה.

מרחב הפתרונות:

$$A\cdot\vec{x}=\vec{b}\iff\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\cdots+\alpha_{1m}x_m=b_1\\ \vdots\\ \alpha_{n1}x_1+\cdots+\alpha_{nm}x_m=b_n\end{cases}$$

אפשר לכתוב:

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\cdots&\alpha_{1m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{n1}&\cdots&\alpha_{nm}\end{bmatrix}}_{n\times m}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix}}_{\vec{x}\ \ m\times 1}=\underbrace{\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}}_{n\times 1}$$

כי: $\vec{b}$

הוכחה:

$$[A\cdot\vec{x}]_{i,1}=\sum_{k=1}^{m}A_{ik}\cdot\underbrace{[\vec{x}]_{k,1}}_{x_k}=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}x_k=$$

$$=\alpha_{i1}x_1+\cdots+\alpha_{im}x_m=b_i$$

זה נכון לכל $1\le i\le n$.

הערה:

בהינתן מע' משוואות $A_{n\times m}\cdot\vec{x}=\vec{b}$, נגדיר את

מרחב הפתרונות להיות:

$$(\ \ =\{\vec{v}\in F^{m\times 1}\mid A\cdot\vec{v}=\vec{b}\}$$

$$(L =) \left\{ v \in \underset{\substack{n \text{ שורות} \\ 1 \text{ עמודה}}}{\ldots} \;\middle|\; A\cdot v = b \right\}$$

טענה:
מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית סגור לחיבור ולכפל בסקלר.

$\vec{b} = 0$

הוכחה: נניח: $\boxed{A\cdot\vec{x} = \vec{0}}$. $\left(x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},\ v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1m} \end{bmatrix} \right)$

יהיו $v_1, v_2 \in L$

$$A\cdot(v_1+v_2) \overset{?}{=} \vec{0}$$

$$\underbrace{A\cdot v_1}_{\vec{0}} + \underbrace{A\cdot v_2}_{\vec{0}} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$$

$$L \ni v_1+v_2 \Leftarrow A\cdot(v_1+v_2) = \vec{0}.$$

כפל בסקלר - בדומה.

טענה: תהא $A\cdot\vec{x} = \vec{b}$ מע' לא הומוגנית.
נניח שקיים פתרון v.
נסמן את מרחב הפתרונות למע' ההומוגנית $(A\cdot\vec{x}=\vec{0})$ ב- H.
אזי מרחב הפתרונות למע' הלא הומוגנית:

$$\boxed{\{ v + h \;:\; h \in H \}}.$$

כדי להגיע לפתרון כל' למע' הלא הומוגנית, צריך לקחת פתרון כלשהו שלה ולחבר אליו פתרון כל' למע' ההומוגנית.

הוכחה:
יהי v פתרון למע' הלא הומוגנית, ויהי L פתרון למע' ההומוגנית. נוכיח:

$$A\cdot(v+h) = \underbrace{A\cdot v}_{\shortparallel} + \underbrace{A\cdot h}_{\overset{\shortparallel}{\vec{0}}} = b+\vec{0} = b$$

לכן $v+h$ הוא פתרון למע' הלא הומוגנית.

עלינו להוכיח כי כל פתרון למע' הלא הומוגנית הוא אכן מצורה זו.

יהי w פתרון כלשהו למע' הלא הומוגנית.

$$A\cdot(w-v) = \underbrace{A\cdot w}_{b} - \underbrace{A\cdot v}_{b} = b-b=0$$

לכן $h:=w-v$ הוא פתרון למע' ההומוגנית.

לסיכום: $\underbrace{w = v+\underbrace{(w-v)}_{h}}$ $= v+h$, כנדרש.

מ.ש.ל.

$\boxed{18^{\underline{05}}}$

כפל שורה-שורה ועמודה-עמודה

כאשר אנו מכפילים מטריצה בוקטור:

טענה:

$$\underbrace{C}_{C} \cdot v = \begin{bmatrix} | & & | \\ c_1 & \cdots & c_n \\ | & & | \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}^{=v} =$$

$$= \underline{\underline{\alpha_1}} \cdot \begin{bmatrix} | \\ c_1 \\ | \end{bmatrix} + \cdots + \underline{\underline{\alpha_n}} \cdot \begin{bmatrix} | \\ c_n \\ | \end{bmatrix} \leftarrow$$

דוגמה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}$$

הוכחה: $w := C \cdot v$ הינו וקטור עמודה בעל n שורות.

$$(*)\ [w]_{i,1} := \sum_{k=1}^{n} C_{ik} \cdot v_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} C_{ik} \cdot \alpha_k$$

וזאת לכל $1 \leq i \leq n$.

לכן וקטור המכפלה w הינו:

$$w = \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ \vdots \\ \\ \end{bmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} C_{1k} \cdot \alpha_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 C_{11} + \cdots + \alpha_n C_{1n} \\ \vdots \\ \\ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} w_{n,1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sum_{k=1} c_{nk}\cdot\alpha_k \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 c_{n1}+\dots+\alpha_n c_{nn} \end{bmatrix}$$

מהגד' סכום וקטורים (וכפל בסק')

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 c_{11} \\ \vdots \\ \alpha_1 c_{n1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \alpha_n c_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_n c_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}} + \dots + \alpha_n \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix}} =$$

$$= \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} | \\ C_1 \\ | \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \cdot \begin{bmatrix} | \\ C_n \\ | \end{bmatrix}$$

כנדרש. מ.ש.ל.

הערה: בדומה, ניתן לכפול וקטור שורה משמאל:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \end{bmatrix}$$

מתקיים:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — R_1 — \\ \vdots \\ — R_n — \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} — R_1 — \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \cdot \begin{bmatrix} — R_n — \end{bmatrix}$$

בפרט:

מקודם...

$$\hookrightarrow 1\cdot[1 \;\; 2] + 2\cdot[3 \;\; 4] = [1 \;\; 2] + [6 \;\; 8] = [7 \;\; 10]$$

כפל שורה-שורה וכפל עמודה-עמודה:

טענה: תהיינה A,B מטריצות $(n\times n)$. אזי:

$$\boxed{\underbrace{A\cdot B}_{M} = \begin{bmatrix} — R_1(A)\cdot B — \\ — R_i(A)\cdot B — \\ — R_n(A)\cdot B — \end{bmatrix}}$$

(1) "שורה-שורה" i

נסמן ב-M ⇐

(2) "עמודה-עמודה":

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} | & & | \\ A\cdot C_1(B) & \cdots & A\cdot C_n(B) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

הוכחה:

(1) יהיו $1\le i,j\le n$:

$$\leftarrow (A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

בגלל ש:

$$M_{ij} = [— \underbrace{R_i(A)}\cdot\underbrace{B} —]_{1j} =$$

מהגדרת כפל מטריצות $R_i(A)\cdot B$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(R_i(A))_{1,k}}_{=}\cdot B_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj} \qquad A_{i,k}$$

לכן $A \cdot B = M$ כנדרש.

(2) הלמה קודמת. מ.ש.ל.

משפט: לכל פעולה אלמנטרית ρ מתקיים:

[A מט' ריבועית]

$$\boxed{\rho(A) = \underbrace{\rho(I_n)}_{\text{מטריצה אלמנטרית}} \cdot A}$$

דוגמה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \rho(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rho = R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\rho(I_2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

הוכחה: נוכיח את המשפט לכל אחד משלושת סוגי הפעולות.

$$\left(I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right)$$

(1) $\rho: R_k \leftrightarrow R_\ell$. נקבל:

$$\rho(I) = \rho \begin{bmatrix} — R_1(I) — \\ \vdots \\ — R_n(I) — \end{bmatrix} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} — R_1(I) — \\ \vdots \\ — R_\ell(I) — \\ \vdots \\ — R_k(I) — \\ \vdots \\ — R_n(I) — \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \leftarrow \ell \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\rho(I) \cdot A = \begin{bmatrix} — R_1(I) \cdot A — \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\rho(I)\cdot A = \begin{array}{c} \\ \text{לפי כפל} \\ \text{שורה-שורה:} \end{array} \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} — R_\ell(I)\cdot A — \\ — R_k(I)\cdot A — \\ \vdots \\ — R_n(I)\cdot A — \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow k \\ \leftarrow \ell \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad (*)$$

מהי $R_i(I)\cdot A$

$$[0 — 0\ \underset{i}{1}\ 0 — 0]\cdot A =$$

כפל שורה במט׳: סכום מקדמי שורה כפול הוקטור

$$= 0\cdot \cancel{R_1(A)} + \cdots + 0\cdot \cancel{R_{i-1}(A)} + 1\cdot R_i(A) + 0\cdot \cancel{R_{i+1}(A)} + \cdots + 0\cdot \cancel{R_n(A)} = \boxed{R_i(A)} \quad (\#)$$

$$\rho(I)\cdot A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} — R_1(A) — \\ — R_\ell(A) — \\ \vdots \\ — R_k(A) — \\ \vdots \\ — R_n(A) — \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow k \\ \\ \leftarrow \ell \\ \\ \\ \end{array} \end{array} =$$

$$= \rho(A).$$

(2) $\rho : R_k \leftarrow \alpha R_k$ $(\alpha \neq 0)$.

$$\rho(I) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} — R_1(I) — \\ \vdots \\ — \alpha R_k(I) — \\ \vdots \\ — R_n(I) — \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \left(= \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\rho(I)\cdot A = \begin{array}{c} \\ k \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} — R_1(I) — \\ \vdots \\ — \alpha R_k(I) — \\ \vdots \\ — R_n(I) — \end{bmatrix}\cdot A =$$

לפי כפל שורה-שורה

$$= \begin{bmatrix} — R_1(I)\cdot A — \\ \vdots \\ — \alpha R_k(I)\cdot A — \\ \vdots \\ — R_n(I)\cdot A — \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \overset{\#}{=}$$

$$= \begin{bmatrix} — R_1(A) — \\ \vdots \\ — \alpha R_k(A) — \\ \vdots \\ — R_n(A) — \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} = \rho(A)$$

$\underline{\rho : R_k \leftarrow R_k + \alpha R_\ell}$ (3

$$\rho(I) = \begin{bmatrix} — R_1(I) — \\ \vdots \\ — R_k(I) + \alpha R_\ell(I) — \\ \vdots \\ — R_n(I) — \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array}$$

ולכן:

$$\rho(I)\cdot A = \begin{bmatrix} — R_1(I) — \\ \vdots \\ — R_k(I) + \alpha R_\ell(I) — \\ \vdots \\ — R_n(I) — \end{bmatrix}\cdot A =$$

לפי כפל שורה-

שורה

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \text{——} & R_1(I)\cdot A & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & (R_k(I)+\alpha R_\ell(I))A & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & R_n(I)\cdot A & \text{——} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{——} & R_1(I)\cdot A & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & R_k(I)\cdot A + \alpha R_\ell(I)\cdot A & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & R_n(I)\cdot A & \text{——} \end{bmatrix} \overset{\#}{=}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{——} & R_1(A) & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & R_k(A)+\alpha R_\ell(A) & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & R_n(A) & \text{——} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} = \rho(A)$$

הוכחנו את הטענה.

מ.ש.ל.

<u>הגדרה</u>: נאמר כי מט' ריבועית A היא <u>הפיכה</u> אם:
קיימת מט' B כך ש-
$$A\cdot B = B\cdot A = I$$
מסמנים $B = A^{-1}$.

מסקנה מהמשפט: אם יש לנו

הפעולות, אזי A הפיכה.

הוכחה: נניח כי ניתן לדרג את A ל- I.
כלומר קיימות פעולות דירוג אלמנטריות:
$\rho_1, \ldots, \rho_t$
כך ש-

$$\boxed{I = \rho_t \cdots \rho_2 \rho_1 (A)}$$

אבל לפי המשפט:

$$\rho_1(A) = \rho_1(I) \cdot A$$

$$\rho_2 \rho_1 (A) = \rho_2(\rho_1(I) \cdot A) = \rho_2(I) \cdot \rho_1(I) \cdot A$$

$$\vdots$$

$$I = \rho_t(\cdots(\rho_2(\rho_1(A)))) = \rho_t(I) \cdot \cdots \cdot \rho_1(I) \cdot A$$

לכן:

$$\boxed{A^{-1} = \rho_t(I) \cdots \rho_1(I)}$$

מ.ש.ל.

דוגמה:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

לפי האלג׳, נדרג את A למט׳ היחידה:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\rho_1]{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\rho_2]{R_1 \leftarrow \frac{1}{2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\rho_3]{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2} R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לכן:

$$A^{-1} = \rho_3(I) \cdot \rho_2(I) \cdot \rho_1(I) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad : A^{-1}$$

נבדוק:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

וגם בכיוון הפוך: $A^{-1} \cdot A = I$.

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מסקנה – פתרון מערכות:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

$A \cdot \begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = I \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{A^{-1} A}_{I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

במקרה שלנו:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

נושא חדש – שחלוף ועקבה

שִׁחְלוּף וְעָקְבָּה

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$. נגדיר:

$$A^t \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$\to [A^t]_{ij} := A_{ji}$$

דוגמה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

תכונות השחלוף:

טענה:

(1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(2) $(A \cdot B)^t = B^t A^t$

$(A\cdot B)^t = B^t A^t$ (2)

$n\times m,\ m\times r$ $\qquad (A^t)^t = A$ (3)

$m\times n \quad r\times m$

הוכחה:

(2)

$$((AB)^t)_{ij} \overset{t}{=} (AB)_{ji} \overset{\text{כהגדרת כפל}}{=} \sum_{k=1}^m A_{jk}B_{ki}$$

$$(B^tA^t)_{ij} \overset{\text{כהגדרת כפל}}{=} \sum_{k=1}^m (B^t)_{ik}\cdot(A^t)_{kj} \overset{t}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^n \underbrace{B_{ki}}\ \underbrace{A_{jk}} \underset{\text{סקלרים ב-F}}{=} \sum_{k=1}^n A_{jk}B_{ki}$$

מ.ש.ל

הגדרה: נאמר כי מטריצה $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$ היא סימטרית אם: $A = A^t$.

דוגמה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

טענה: לכל מטריצה ריבועית A, מתקיים: AA^t, $A+A^t$ הן סימטריות.

הוכחה: לפי תכונות השחלוף:

$$(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A =$$

$$= A + A^t$$

$$(AA^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = AA^t$$

$(AB)^t = B^t A^t$
עבור: $B = A^t$

$(A^t)^t = A$

הגדרה: עקבה של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$:

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

$$(= A_{11} + \dots + A_{nn})$$

דוגמה:

$$tr\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 + 4 = 5$$

(trace = עקבה)

תכונות העקבה:

(1) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

(2) $tr(AB) = tr(BA)$

הוכחה:

(1) - קל.

(2)

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

$$tr(AB) \overset{\text{הגדרה } tr}{=} \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \overset{\text{לפי הגדרת הכפל}}{=}$$

שינוי סדר סכימה

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \right) = \quad \text{קומוט' ב-}F$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} B_{ki} A_{ik}}_{} \right) = \quad \text{לפי הגד' הכפל}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} \overset{tr}{=} tr(BA)$$

מ.ש.ל.

* $tr(A^t) = tr(A)$.