פתרון מבחן מועד א – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 21/02/18

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)\sin^2(3x)}{1-\cos(5x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)\sin^2(3x)}{1-\cos(5x)}=\lim_{x\to 0}\arctan(x)\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)^2\frac{(5x^2)}{1-\cos(5x)}\frac{9}{25}=0\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{9}{25}=0$$

ב. $\lim_{x\to(-\infty)} xe^x$

$$\lim_{x\to(-\infty)} xe^x \overset{-\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to(-\infty)}\frac{x}{e^{-x}} \underset{L'\text{Hopital}}{\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to(-\infty)}\frac{1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to(-\infty)}-e^x=0$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2)!}{(n!)^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)^2\right)!}{\left((n+1)!\right)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(n^2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)!(n+1)^2(n!)^2}{((n+1)n!)^2(n^2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)!}{(n^2)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2)!(n^2+1)\cdot(n^2+2)\cdots(n^2+2n)}{(n^2)!}=\lim_{n\to\infty}(n^2+1)\cdot(n^2+2)\cdots(n^2+2n)\geq\lim_{n\to\infty}(n^2+1)=\infty$$

כיוון שגבול המנה גדול מ1, לפי מבחן המנה $\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2)!}{(n!)^2}=\infty$.

.2

א.   חשבו את $\int \frac{e^{4x}+e^{x}}{e^{2x}+2e^{x}+2}dx$.

$$\int \frac{e^{4x}+e^{x}}{e^{2x}+2e^{x}+2}dx=\left\{\begin{matrix} e^{x}=t \\ e^{x}dx=dt \end{matrix}\right\}=\int \frac{t^{3}+1}{t^{2}+2t+2}dt=$$

נבצע חילוק פולינומים ונקבל כי

$$=\int\left(t-2+\frac{2t+5}{t^{2}+2t+2}\right)dt=\frac{t^{2}}{2}-2t+\int \frac{2t+2}{t^{2}+2t+2}dt+\int \frac{3}{t^{2}+2t+2}dt=$$

$$=\frac{t^{2}}{2}-2t+\ln\left(t^{2}+2t+2\right)+\int \frac{3}{(t+1)^{2}+1}dt=\frac{t^{2}}{2}-2t+\ln\left(t^{2}+2t+2\right)+3\arctan(t+1)+\mathrm{C}=$$

$$\frac{e^{2x}}{2}-2e^{x}+\ln\left(e^{2x}+2e^{x}+2\right)+3\arctan(e^{x}+1)+\mathrm{C}$$

ב.   קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^{4}+1}dx$.

מדובר באינטגרל לא אמיתי על פונקציה חיובית, נפעיל את מבחן ההשוואה הגבולי.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln(x)}{x^{4}+1}}{\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^{2}+\frac{1}{x^{2}}}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x-\frac{2}{x^{3}}}=0$$

וכיוון שהאינטגרל $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{2}}dx$ מתכנס (כיוון ש $2>1$), לכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי גם האינטגרל $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^{4}+1}dx$ מתכנס.

.3

א. הוכיחו כי למשוואה $e^x(x-1)=1$ יש פתרון יחיד.

ראשית נעביר אגף ונחפש שורשים לפונקציה $h(x)=e^x(x-1)-1$.

נגזור את הפונקציה ונקבל $h'(x)=xe^x$.

ברור כי לכל $x>0$ הנגזרת חיובית ולכן הפונקציה עולה, וכאשר $x<0$ הנגזרת שלילית ולכן הפונקציה יורדת.

נחשב גבולות:

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}e^x(x-1)-1=\infty$$

$$\lim_{x\to(-\infty)}h(x)=\lim_{x\to(-\infty)}xe^x-e^x-1=-1$$

(נעזרנו כאן בגבול שחישבנו בשאלה 1 סעיף ב')

וכמו כן נשים לב כי $h(0)=-2$.

כיוון שהפונקציה h יורדת בקטע $(-\infty,0)$ ו$\lim_{x\to(-\infty)}h(x)=-1$ אזי h שלילית בקטע (אחרת $h\geq 0$ בנקודה כלשהי בקטע, וכיוון ש h יורדת נובע כי $\lim_{x\to(-\infty)}h(x)\geq 0$), ולכן אינה חותכת את הציר.

כעת, כיוון ש $\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$ נובע כי קיימת נקודה חיובית בה $h>0$.

יחד עם העבודה ש $h(0)<0$ לפי משפט ערך הביניים הפונקציה הרציפה חותכת את הציר בקטע $(0,\infty)$.

כיוון שהפונקציה עולה בקטע, הפתרון הוא יחיד.

<u>הערה</u>: בקטע $(-\infty,0)$ מתקיים כי $x<0$ ולכן $e^x(x-1)-1<0$ באופן מיידי, ואין צורך בחישוב הגבול.

ב. הוכיחו כי לפונקציה $f(x)=\frac{x}{1+e^x}$ יש נקודת מקסימום גלובאלית.

נגזור את הפונקציה ונקבל

$$f'(x)=\frac{1+e^x-xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{1-e^x\left(x-1\right)}{\left(1+e^x\right)^2}=-\frac{h(x)}{\left(1+e^x\right)^2}$$

כאשר $h(x)$ היא הפונקציה מסעיף א'.

ראינו כי $h(x)$ שלילית עד שהיא חותכת את הציר בנקודה כלשהי c בקטע $(0,\infty)$, ולאחר מכן היא עולה ולכן חיובית.

לכן $f'(x)$ חיובית בקטע $(-\infty,c)$ ושלילית בקטע (c,∞).

סה"כ f עולה עד c, ויורדת אחריה, ולכן נקודה זו היא מקסימום גלובאלי.

(כיוון שלכל $x<c$ מתקיים כי $f(x)<f(c)$ כי זה תחום עלייה, ולכל $x>c$ מתקיים $f(x)<f(c)$ כי זה תחום ירידה.)

4. תהי פונקציה f הגזירה בכל הממשיים, ומקיימת כי $f''(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

א. יהי $a\in\mathbb{R}$, הוכיחו כי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x+a)\geq f'(a)x+f(a)$.

<u>דרך I</u>:

נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x)=f(x+a)-f'(a)x-f(a)$ ונוכיח שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $h(x)\geq 0$.

נחשב את הנגזרות:

$$h'(x)=f'(x+a)-f'(a)$$

$$h''(x)=f''(x+a)$$

לפי הנתון בכל הממשיים מתקיים כי $h''>0$ ולכן h' פונקציה עולה.

$h'(0)=f'(a)-f'(a)=0$.

וכיוון שהיא עולה, נובע כי בקטע $(0,\infty)$ הפונקציה h' חיובית, ובקטע $(-\infty,0)$ היא שלילית.

לכן h יורדת בקטע $(-\infty,0)$ ועולה בקטע $(0,\infty)$, ולכן יש לה מינימום גלובאלי ב $x=0$.

נציב אפס בפונקציה $h(0)=f(a)+0-f(a)=0$.

לכן בכל הממשיים $h(x)\geq 0$.

דרך II:

עבור $x>0$ נפעיל את משפט לגראנז' בקטע $[a,x+a]$ על הפונקציה הגזירה f ונקבל כי קיימת נקודה $a<c<a+x$ עבורה $f'(c)=\frac{f(x+a)-f(a)}{x+a-a}$.

כיוון ש $f''>0$ הפונקציה f' עולה.

כיוון ש $a<c$ נובע כי $f'(a)<f'(c)$ וביחד $f'(a)<f'(c)=\frac{f(x+a)-f(a)}{x}$.

כיוון ש $x>0$ מותר להכפיל בו את שני אגפי האי שיוויון ולכן נקבל כי

$xf'(a)<f(x+a)-f(a)$.

נעביר אגף ונקבל את מה שצריך להוכיח.

עבור $x=0$ פשוט נציב ונקבל כי $f(0+a)\geq f'(a)\cdot 0+f(a)$ ואכן $f(a)\geq f(a)$.

עבור $x<0$ נפעיל את משפט לגראנז' בקטע $[x+a,a]$ ונקבל כי קיימת $x+a<c<a$ כך ש

$f'(c)=\frac{f(x+a)-f(a)}{x+a-a}$.

הפעם כיוון ש $c<a$ מתקיים כי $f'(c)<f'(a)$ ולכן $\frac{f(x+a)-f(a)}{x}<f'(a)$.

כיוון ש $x<0$ כפל בו הופך את סימן אי השיוויון ולכן נקבל

$f(x+a)-f(a)>f'(a)\cdot x$, ושוב קיבלנו את מה שהיה צריך להוכיח.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה חסומה מלעיל.

נציב $a=0$ בסעיף א' (כל ערך אחר היה עובד באותה מידה) ונקבל כי $f(x)\ge f'(0)x+f(0)$.

אם $f'(0)>0$ אזי $\lim_{x\to\infty} f'(0)x+f(0)=\infty$ ולפי חצי סנדוויץ' גם $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ולכן הפונקציה אינה חסומה מלעיל כדרוש.

אם $f'(0)=0$, כיוון ש f' עולה (הרי $f''>0$) נובע כי $f'(1)>0$. נציב $a=1$ במשוואה של סעיף א' ונקבל כי $f(x+1)\ge f'(1)x+f(1)$.

באופן דומה, שוב $\lim_{x\to\infty} f'(1)x+f(1)=\infty$ ולכן $\lim_{x\to\infty} f(x+1)=\infty$ ולכן הפונקציה אינה חסומה מלעיל.

אם $f'(0)<0$ אזי $\lim_{x\to(-\infty)} f'(0)x+f(0)=\infty$ ולפי חצי סנדוויץ' גם $\lim_{x\to(-\infty)} f(x)=\infty$ ולכן הפונקציה אינה חסומה מלעיל.

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n\left(a_n+1\right)$, ותנאי ההתחלה $0<a_1$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

$$a_{n+1}-a_n=a_n\left(a_n+1\right)-a_n=a_n^2\ge 0$$

ולכן הסדרה מונוטונית עולה.

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

אם הסדרה הייתה חסומה, כיוון שהיא מונוטונית היה לה גבול סופי שנסמנו באות L .

הגבולות של שני צידי המשוואה $a_{n+1}=a_n\left(a_n+1\right)$ שווים ולכן $L=L(L+1)$ ולכן $L=0$.

הסדרה a_n עולה ולכן $L\ge a_1>0$ בסתירה.

לכן הסדרה אינה חסומה, וכיוון שהיא מונוטונית עולה מתקיים כי $a_n\to\infty$.

.6

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n+2k}{n^3}}$

ראשית ננסה להפוך את איברי הסדרה לסכומי רימן

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n+2k}{n^3}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+2\frac{k}{n}}$$

קל לראות ש a_n הוא סכום רימן של הפונקציה $f(x)=\sqrt{1+2x}$ בקטע $[0,1]$ עם החלוקה $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right\}$ ובחירת הנקודות $C_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right\}$.

פרמטר החלוקה הוא $\lambda(P_n)=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$.

כיוון ש $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ היא אינטגרבילית שם, וכיוון שפרמטר החלוקה שואף לאפס, סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל המסויים $a_n\to\int_0^1\sqrt{1+2x}dx$.

נחשב את האינטגרל:

$$\int_0^1\sqrt{1+2x}dx=\left\{\begin{matrix}1+2x=t\\2dx=dt\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\left(\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right)_1^2=\frac{\sqrt{3^3}-1}{3}$$

ב. קרבו את $\ln\left(\sqrt{2}\right)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{5}$.

נשתמש בפולינום מקלורן של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+x\right)$ ונקרב אותה בנקודה $x=1$ כיוון ש $f(1)=\frac{1}{2}\ln(2)=\ln\left(\sqrt{2}\right)$.

<u>שימו לב</u>: $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+x\right)=\ln\left(\sqrt{1+x}\right)$ עבור $x>-1$, והיה ניתן להשתמש בשתי הצורות.

כעת נחשב נגזרות:

$$f'(x)=\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}\left(1+x\right)^{-1}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left(1+x\right)^{-2}$$

$$f'''(x)=\left(1+x\right)^{-3}$$

ננסה לחשב את השגיאה עבור $n=2$.

הנקודה הרצוייה היא 1 והנקודה המצוייה סביבה פיתחנו היא 0 (פולינום מקלורן), ולכן לפי לגראנז' קיימת נקודה $0<c<1$ עבורה

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(2\right)-P_2(1)\right|=\left|\frac{f'''(c)}{3!}1^3\right|=\frac{1}{6(1+c)^3}\overset{0<c}{<}\frac{1}{6}<\frac{1}{5}$$

ולכן קירוב מתאים הוא

$$P_2(1)=f(0)+f'(0)\cdot 1+\frac{f''(0)}{2!}\cdot 1^2=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$