

03.10.17

88-112 אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"ח – מועד ב'

מרצים: דר' שמעון ברוקס, דר' אלי מצרי, דר' ארז שיינר
מתרגלים: ניקול בלשוב, עדי בן-צבי, תמר בר-און, עוזי חרוש, מיכאל טויטו, עקיבא מלכה,
פולינה לוצקר
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הוראות:

- יש לענות על כל 5 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 105 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת **לא תיבדק כלל**.

חלק א'

1. (12 נק') יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל אותו שדה, ותהי

$T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

הוכיחו כי $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$.

דף נוסף לשאלה מספר _____

2. (24 נק') יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל אותו שדה, ותהיינה $T: V \rightarrow W, S: W \rightarrow V$ העתקות לינאריות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם $\ker T \subseteq \text{Im } S$ אזי $\dim \ker T \leq \dim \ker (T \circ S)$.
- ב. אם $V = W$ ו $S \circ T = T \circ S$, אזי $\dim \ker T = \dim \ker S$.
- ג. אם $\ker T \cap \text{Im } S = \{0_V\}$ וגם S חח"ע, אזי $T \circ S$ הפיכה.
- ד. אם $V = W$ ו T הפיכה אזי $T \circ S = S \circ T$.

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____

3. (10 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית ממימד n , יהי B בסיס סדור ל V ותהי

A מטריצה ריבועית הפיכה מגודל $n \times n$ מעל אותו שדה.

הוכיחו/הפריכו: קיים בסיס סדור C ל V כך ש $[I]_C^B = A$.

(כאשר $[I]_C^B$ היא מטריצת המעבר מ B ל C)

דף נוסף לשאלה מספר _____

$$4. \text{ נביט במישור } U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ובישר } W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

- א. (5 נק') הוכיחו כי U תת מרחב של \mathbb{R}^3 .
- ב. (10 נק') מצאו את $U \cap W$ (החיתוך בין המישור לישר).
- ג. (7 נק') מצאו בסיס לתת מרחב $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ממימד 2 כך ש $V \cap W = \emptyset$.
- ד. (7 נק') מצאו בסיס לתת מרחב $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ממימד 2 כך ש $W \subseteq V$.

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____

5. נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

א. (10 נק') קבעו עבור אילו ערכי $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ המטריצה הפיכה.

ב. (10 נק') נניח כי $a = 1, b = -3, c = 2$. לאילו ערכי x מתקיים

כי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \in C(A)$? (כאשר $C(A)$ הוא מרחב העמודות של A).

ג. (10 נק') נניח כי $a = 1, b = 0, c = 1$ מצאו $x \in \mathbb{C}$ כך ש $|A| = 0$,

ומצאו בסיס ל $N(A)$ במקרה זה. (כאשר $N(A)$ הוא מרחב האפס של

המטריצה A).

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____