תרגיל

מצאו נוסחה עבור שטח פני גליל בלי המכסים שרדיוסו R וגובהו h.

פתרון

יש פרמטריזציה

$$r\left(u,v\right)=\left(R\cos u,R\sin u,v\right)\qquad \begin{array}{c}0<u<2\pi\\ 0<v<h\end{array}$$

הפרמטריזציה הזו לא מכסה את כל הגליל, אבל זה לא משנה לצרכי שטח.
נגזרות חלקיות:

$$r_{u}=\begin{pmatrix}-R\sin u\\ R\cos u\\ 0\end{pmatrix}\qquad r_{v}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$g_{11}=\left\langle r_{u},r_{u}\right\rangle =R^{2}\qquad g_{12}=\left\langle r_{u},r_{v}\right\rangle =0=g_{21}\qquad g_{22}=\left\langle r_{v},r_{v}\right\rangle =1$$

$$\implies G=\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}R^{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\implies\det\left(g_{ij}\right)=R^{2}$$

הערה: מטריקה של מיקור היא $\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ולכן אם $R=1$ הגליל "דומה" למישור.

שטח הגליל הוא

$$A=\iint\limits_{\left\{ \begin{array}{c}0<u<2\pi\\ 0<v<h\end{array}\right\} }\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_{0}^{h}\int_{0}^{2\pi}R=R\cdot2\pi\cdot h=\left(2\pi R\right)\cdot h$$

זו בעצם הוכחה לכך ששטח המעטפת של הגליל הוא ההיקף כפול הגובה(כי $2\pi R$ הוא ההיקף)

הגדרה

פונקציה $f:M\to N$ (M,N משטחים) נקראת אימרסיה(immersion) אם בכל נקודה $p\in M$ הדיפרנציאל $\mathrm{d}_{P}f:T_{P}M\to T_{f(P)}N$ הוא חח"ע.
באופן שקול f אי אימרסיה אם $\operatorname{rank}\mathrm{d}_{p}f=\dim M$ לכל $p\in M$.
ההגדרה נכונה באופן כללי, אך במקרה של משטחים המימד הוא $\dim M=2$.

תרגיל

האם קיימת אימרסיה $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{m}$ עבור $n>m$? נמקו.

פתרון

נניח בשלילה שקיימת אימרסיה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. ניתן לייצג את הדיפרנציאל $\mathrm{d}_p f$ ע"י מטריצת יעקובי $J_f : T_P\mathbb{R}^n \to T_{f(P)}\mathbb{R}^m$. ממדי המטריצה הם $m \times n$. **אבל**, $\operatorname{rank} J_f \le \min(m,n) = m < n$, ולכן אי אפשר $\operatorname{rank} J_f = n$ - והגענו לסתירה, כי הדרישה שf תהיה אימרסיה היא $\operatorname{rank} J_f = n$.

תרגיל

מצאו נורמל ומרחב משיק עבור האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$ בכל נקודה $P = (x_0, y_0, z_0)$ שעליו.

פתרון

המשטח נתון בצורה סתומה ע"י המשוואה $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0$. הגראדיאנט של F הוא

$$\nabla F = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$$

ובנקודה P

$$\nabla F(P) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right)$$

וזה בדיוק הנורמל $\vec{n}$[1].

המרחב המשיק $T_P M$ מכיל בדיוק את כל הנקודות שמאונכות ל$\vec{n}$. ז"א $\langle \vec{n}, (x,y,z) \rangle = 0$:

$$\boxed{\frac{2x_0}{a^2}\cdot x + \frac{2y_0}{b^2}\cdot y + \frac{2z_0}{c^2} z = 0}$$

הערה

נשים לב שמה שמצאנו זה לא מישור משיק אלא מרחב משיק(זה בעצם מה שביקשו)

המישור המשיק עובר דרך הנקודה P, המרחב המשיק עובר דרך ראשית הצירים.

הגדרה

בהנתן משטח פרמטרי $r(u,v)$, התבנית היסודית השנייה בנקודה a, II_a, היא העתקה בילינארית $T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}$.

אם נבחר לייצג את II_a בבסיס $\{r_u, r_v\}$ וקטורי הנגזרות החלקיות, נוכל להציג את II_a ע"י מטריצה

$$II_a(x,y) = x^T B y$$

[1] לא בטוח שבאורך 1 - בגלל זה סימנו $\vec{n}$ ולא $\hat{n}$.

(B היא המטריצה המייצרת את II_a עם הבסיס $\{r_u, r_v\}$) כאשר

$$B = \begin{pmatrix} \langle r_{uu}, \hat{n} \rangle & \langle r_{uv}, \hat{n} \rangle \\ \langle r_{vu}, \hat{n} \rangle & \langle r_{vv}, \hat{n} \rangle \end{pmatrix}$$

$$r_{uu} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} \qquad r_{uv} = \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} \qquad r_{vu} = \frac{\partial^2 r}{\partial v \partial u} \qquad r_{vv} = \frac{\partial^2 r}{\partial v^2}$$

$$\vec{n} = r_u \times r_v \qquad \hat{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

הגדרה

אופרטור הצורה S מוגדר בצורה סתומה ע"י

$$II_a(x, y) = \langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$$

הגדרה מפורשת היא

$$S = G^{-1} \cdot B$$

תרגיל

המשטחים הבאים נתונים באמצעות פרמטריזציה. ציירו את המשטחים ומצאו את מטריקת (רימן), אופרטור הצורה ואת התבנית היסודית השנייה.

א. חרוט $\begin{matrix} 0 < u < \infty \\ 0 < v < 2\pi \end{matrix}$, $r(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ ku \end{pmatrix}$ כאשר $k > 0$

ב. הליקואיד $\begin{matrix} 0 < u < \infty \\ -\infty < v < \infty \end{matrix}$ $r(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ k \cdot v \end{pmatrix}$ כאשר $k > 0$

פתרון

א. נחשב נגזרות חלקיות:

$$r_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ k \end{pmatrix} \qquad r_v = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

רכיבי מטריקת רימן הם:

$$g_{11} = \langle r_u, r_v \rangle = 1 + k^2 \qquad g_{12} = \langle r_u, r_v \rangle = 0 = \langle r_v, r_u \rangle = g_{21} \qquad g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = u^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+k^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}}$$

נעבור לחישוב התבנית היסודית <u>השניה</u>. לצורך כך, נחשב נגזרות שניות:

$$r_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_{uv} = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = r_{vu} \qquad r_{vv} = \begin{pmatrix} -u\cos v \\ -u\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

רוצים גם את $\hat{n}$:

$$\vec{n} = r_u \times r_v = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\kappa} \\ \cos v & \sin v & k \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -ku\cos v \cdot \hat{\imath} - ku\sin v\hat{\jmath} + u\hat{\kappa} = u\left(-k\cos v, -k\sin v, 1\right)$$

$$\|\vec{n}\| = |u|\sqrt{k^2\cos^2 v + k^2\sin^2 v + 1} = |u|\sqrt{1+k^2} = u\sqrt{1+k^2}$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} -k\cos v \\ -k\sin v \\ 1 \end{pmatrix}$$

רכיבי התבנית היסודית השנייה:

$$b_{11} = \langle r_{uu}, \hat{n} \rangle = 0 \qquad b_{12} = \langle r_{uv}, \hat{n} \rangle = 0 = \langle r_{vu}, \hat{n} \rangle = b_{21} \qquad b_{22} = \langle r_{vv}, \hat{n} \rangle = \frac{ku}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{ku}{\sqrt{1+k^2}} \end{pmatrix}}$$

לבסוף:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2} \end{pmatrix}$$

אופרטור הצורה הוא

$$S = G^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{ku}{\sqrt{1+k^2}} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{u\sqrt{1+k^2}} \end{pmatrix}}$$

ב. וקטורי הנגזרות החלקיות:

$$r_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_v = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ k \end{pmatrix}$$

לכן רכיבי המטריקה הם

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 \\ g_{12} = 0 &= g_{21} \\ g_{22} &= u^2+k^2 \end{aligned} \implies G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+k^2 \end{pmatrix}$$

כעת, נחשב את הנורמל:

$$\vec{n} = r_u \times r_v = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\kappa} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\sin v \\ -k\cos v \\ u \end{pmatrix}$$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{k^2+u^2}} \cdot \begin{pmatrix} k\sin v \\ -k\cos v \\ u \end{pmatrix}$$

נגזרות שניות:

$$r_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_{uv} = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = r_{vu} \qquad r_{vv} = \begin{pmatrix} -u\cos v \\ -u\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

רכיבי התבנית היסודית השנייה:

$$b_{11} = 0 \qquad b_{12} = b_{21} = \frac{-k}{\sqrt{k^2+u^2}} \qquad b_{22} = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{\sqrt{k^2+u^2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{k^2+u^2}} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{k}{\sqrt{k^2+u^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לבסוף

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+k^2} \end{pmatrix}$$

ולכן אופרטור הצורה הוא

$$S = G^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}^3} & 0 \end{pmatrix}$$

הגדרה

בהנתן משטח M, הערכים העצמיים של אופרטור הצורה S נקראים ערכי העקמומיות הראשיים ומסומנים κ_1, κ_2.

עקמומיות גאוס מוגדרת ע"י

$$K = \det S = \frac{\det B}{\det G} = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

העקמומיות הממוצעת היא

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ S$$

תרגיל

עבור המשטחים הקודמים מצאו את עקמומיות גאוס ואת העקמומיות הממוצעת.

פתרון

א. (חרוט) מצאנו $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{u\sqrt{k^2+1}} \end{pmatrix}$. עקמומיות גאוס היא $K = \det S \equiv 0$ והממוצעת $H = \frac{k}{2u\sqrt{k^1+1}}$.

(ניתן אפילו את ערכי העקמומיות הראשיים:

$$"\lambda_1" = \kappa_1 = 0 \qquad "\lambda_2" = \kappa_2 = \frac{k}{u\sqrt{k^2+1}}$$

ב. (הליקואיד) מצאנו

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{\sqrt{k^2+u^2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{k^2+u^2}^3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \det S = -\frac{k^2}{\left(k^2+u^2\right)^2} \qquad H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ S = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$