$\bar{D}$ (תחום סגור בעל שטח). $C\left(\bar{D}\right) \subseteq R\left(\bar{D}\right)$.

הכללה

אם f פונקציה ממשית חסומה על $\bar{D}$, קבוצת נקודות אי הרציפות שלה היא בעלת שטח אפס, אזי $f \in R\left(\bar{D}\right)$.

תנאי רימן $\sum\limits_{j}\left(M_j - m_j\right) S\left(\bar{D}\right)$ עבור $\lambda\left(T\right) < \delta$.

K קבוצת נקודות אי הרציפות של f.

כותבים $T = T_1 \cup T_2$ כאשר T_1 אוסף התחומים בחלקיים שאינם פוגשים את K וT_2 אוסף התחומים החלקיים שפוגשים את K.

גרף של פונקציה

גרף של φ רציפה על $[a,b]$ הוא בעל שטח אפס.(שכן בגלל הרציפות אפשר לכסות אותו בריבועים בעלי סה"כ שטח קטן כרצוננו).

אם יש לנו שתי פונקציות, אז השטח ביניהם $\bar{D} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} \varphi\left(x\right) \leq y \leq \psi\left(x\right) \\ a \leq x \leq b \end{array} \right\}$ נקרא תחום "נורמלי" מטיפוס x.

$\left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} \varphi\left(y\right) \leq x \leq \psi\left(y\right) \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}$ נקרא תחום נורמלי מטיפוס y.

∂D בעלת שטח אפס.

תהי $f \in C\left(\bar{D}\right)$, עם $\bar{D}$ תחום נורמלי(טיפוס x). $\bar{D} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} \varphi\left(x\right) \leq y \leq \psi\left(x\right) \\ a \leq x \leq b \end{array} \right\}$, φ, ψ רציפות.

φ, ψ רציפות בקטע סגור ולכן חסומות. $\alpha \leq \varphi\left(x\right) \leq \psi\left(x\right) \leq \beta$.

$$\bar{D} \subseteq I \doteqdot [a,b] \times [\alpha, \beta]$$

נרחיב את f לI ע"י $\begin{array}{l} f|_{\bar{D}} = f \\ f|_{I \setminus \bar{D}} = 0 \end{array}$

קב' נקודות האי רציפות של f בI היא תת-קבוצה K של I. כיוון ש∂D בעל שטח אפס, הרי K ג"כ בעלת שטח אפס. לכן $f \in R\left(I\right)$

סיכום

משפט

יהי $\bar{D}$ תחום נורמלי ותהי $f \in C\left(\overline{D}\right)$. יהי $I = [a,b] \times [\alpha, \beta]$ תא סגור המכיל את $\bar{D}$. נרחיב את f לI ע"י הגדרתה כאפס על $I \setminus \bar{D}$. אזי $f \in R\left(I\right)$ ומתקיים

$$\boxed{\iint\limits_{I} f \, \mathrm{d}s = \iint\limits_{\bar{D}} f \, \mathrm{d}S} (*)$$

הוכחת $(*)$

$\left\{\bar{D},\left(I\backslash\bar{D}\right)\right\}$ חלוקה של I.

משפט(חישוב אינטגרל כפול בעזרת אינטגרציה חוזרת)

יהי $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$. תהי $f\in R\left(I\right)$. ונניח שלכל $x\in[a,b]$, $f\left(x,\cdot\right)$ אינטגרבילית לפי y ב$[\alpha,\beta]$$(*)$. אזי הפונקציה $F\left(x\right)\doteqdot\int_{\alpha}^{\beta}f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y$ ($x\in[a,b]$) אינטגרבילית ב$[a,b]$, ו$\iint\limits_{I}f\,\mathrm{d}x$ $\int_{a}^{b}F\left(x\right)\,\mathrm{d}x$. כלומר:

$$\boxed{\int_{a}^{b}\left(\int_{\alpha}^{\beta}f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{I}f\,\mathrm{d}S}$$

$f\in R\left(I\right)$. אם לכל y נתון, $f\left(\cdot,y\right)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$$(**)$. אזי $\iint\limits_{I}f\,\mathrm{d}S=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\alpha}^{b}f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$

הערה 1

אם $f\in R\left(I\right)$ ושני התנאים $(*)$ ו$(**)$ מתקיימים אזי שני האינטרגרלים החוזרים מתלכדים(עם $\iint\limits_{I}f\,\mathrm{d}S$).

הוכחה

נסתכל על חלוקות של I מהטיפוס הבא:

$$T=\left\{[x_{i-1},x_{i}]\times[y_{j-1},y_{j}]\,\middle|\,\begin{array}{c}1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m\end{array}\right\}$$

נבחר באופן שרירותי $t_{i}\in[x_{i-1},x_{i}]$ לפי הנתון$(*)$ $f\left(t_{i},\cdot\right)$ אינטגרבילית לפי y ב$[\alpha,\beta]$.

$$F\left(t_{i}\right)\doteqdot\int_{\alpha}^{\beta}f\left(t_{i},y\right)\,\mathrm{d}y=...$$

(מוגדרת היטב)

$$...=\sum_{j=1}^{m}\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_{j}}f\left(t_{i},y\right)\,\mathrm{d}y$$

ו

$$\int_{a}^{b}F\left(x\right)dx=\iiint\limits_{I}f\,\mathrm{d}S$$

כלומר

$$\sum_{i=1}^{n}F\left(t_{i}\right)\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_{j}}f\left(t_{i},y\right)\,\mathrm{d}y\left(x_{i}-x_{i-1}\right)\leq$$

$$\left(m_{ij}=\inf_{I_{ij}} f \qquad M_{ij}=\sup_{I_{ij}} f\right)$$

$$\leq \sum_i \sum_j M_{ij} \underbrace{\left(\alpha_j-\alpha_{j-1}\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)}_{S(I_{ij})}$$

קיבלנו:

$$\boxed{\sum_{i,j} m_{ij} S\left(I_{ij}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} F\left(t_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right) \leq \sum_{i,j} M_{ij} S\left(I_{ij}\right)}$$

מאידך

$$\sum_{i,j} m_{ij} S\left(I_{ij}\right) \leq \iint_I f \, \mathrm{d}S = \sum_{i,j} \iint_{I_{ij}} f \, \mathrm{d}s \leq \sum_{i,j} m_{ij} S\left(I_{ij}\right)$$

ולכן

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F\left(t_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)-\iint_I f \, \mathrm{d}S\right| \leq \sum_{i,j} \underbrace{\left(M_{ij}-m_{ij}\right) S\left(I_{ij}\right)}_{\to 0}$$

כאשר $\lambda\left(T\right) \to 0$. לכן

$$\exists \lim_{\lambda([a,b]) \to 0} \sum_{i=1}^{n} F\left(t_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\iint_I f \, \mathrm{d}S$$

ז"א F אינטגרבילית על $[a,b]$, ו $\boxed{\int_a^{bn} F\left(x\right)\, \mathrm{d}x=\iint_I f \, \mathrm{d}S}$

תוצאה

יהי $\bar{D}$ תחום נורמלי מטיפוס x. ז"א קיימות φ, ψ רציפות על $[a,b]$ כך ש

$$\bar{D}=\left\{(x,y) \middle| \begin{array}{c} \varphi\left(x\right) \leq y \leq \psi\left(x\right) \\ a \leq x \leq b \end{array}\right\}$$

תהי $f \in C\left(\bar{D}\right)$. אזי

$$\iint_D f \, \mathrm{d}S=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f\left(x,y\right)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

נרחיב את הגדרת f ל I ע"י הגדרתה באפס ב$I \backslash \bar{D}$ אזי $f \in R\left(I\right)$(ר' שקול קודם).

לכל $x \in [a,b]$ נתון, $f(x,\cdot)$ רציפה ב$[\alpha,\beta]$ פרט אולי לשתי נקודות $y=\varphi(x)$ ו$y=\psi(x)$ והיא חסומה ב$[\alpha,\beta]$(כי רציפה בקטע הסגור $[\varphi(x),\psi(x)]$ ו0 במשלים שלו). לכן $f(x,\cdot)$ אינטגרבילית ב$[\alpha,\beta]$
לכן, לפי המשפט,

$$\iint\limits_{\bar{D}} f\,\mathrm{d}S+\underbrace{\iint\limits_{I\setminus\bar{D}} f\,\mathrm{d}S}_{=0}=\iint\limits_{I} f\,\mathrm{d}S=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

תרגיל

חשב את האינטגרל הכפול $\iint\limits_{\bar{D}} y^2e^{x^3}\,\mathrm{d}S$ במקום ש$\bar{D}$ הוא המשולש הסגור $\bar{D}=\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{l}0\le y\le x\\ 0\le x\le 1\end{array}\right\}$

פתרון

זהו תחום נורמלי מטיפוס x.

$$\checkmark\quad f\in C\left(\bar{D}\right)$$

$$\iint\limits_{\bar{D}} y^2e^{x^3}\,\mathrm{d}S=\int_0^1\left(\int_0^x ye^{x^3}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{x^2}\left(\underbrace{\int_0^y y\,\mathrm{d}y}_{y^2|_0^x=\frac{x^2}{2}}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^3}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 e^u\frac{du}{3}=\frac{1}{6}\int_0^1 e^u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{6}e^u\Big|_0^1=\frac{1}{6}(e-1)$$

ניתן גם לחשב הפוך ולפי המשפט זה יצא אותו דבר:

$$\int\limits_{\bar{D}} ye^{x^3}\,\mathrm{d}S=\int_0^1\left(\int_y^1 ye^{x^3}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

מסקנה:

$$\int_0^1\left(\int_y^1 ye^{x^3}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}(e-1)$$