תרגיל רשות:

תהא $E \subset \mathbb{R}$ כך ש: $0 < m^*(E) < \infty$.
הוכיחו כי לכל $\varepsilon \in (0,1)$ קיים קטע פתוח $I \subset \mathbb{R}$ כך ש: $m^*(E \cap I) \geq \varepsilon m^*(I)$.

הוכחה:

$m^*(E) = inf\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) \,|\, E \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n,\, I_n\, is\, open\, interval\right\}$.

מהגדרת האינפימום, לכל $\delta > 0$ קיימת סדרת קטעים פתוחים $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m^*(E) + \delta$.

כעת, לכל $\varepsilon \in (0,1)$ נגדיר $\delta_\varepsilon = (1/\varepsilon - 1)\cdot m^*(E)$ (בדקו שאכן $\delta_\varepsilon > 0$).

אזי יש סדרת קטעים פתוחים $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(J_n) < m^*(E) + \delta_\varepsilon$, כלומר:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m^*(E) + (1/\varepsilon - 1)\cdot m^*(E) = 1/\varepsilon m^*(E)$, ולכן:

$\varepsilon \sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m^*(E)$.

כעת, נניח בשלילה כי אין קטע פתוח $I \subset \mathbb{R}$ כך ש: $m^*(E \cap I) \geq \varepsilon m^*(I)$.
בפרט, זה נכון לכל הקטעים ב־ $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ואזי לכל $n \in \mathbb{N}$: $m^*(E \cap J_n) < \varepsilon m^*(J_n)$.
מתקיים:

$$m^*(E) = m^*(E \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n)) = m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap J_n)) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap J_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon m^*(J_n) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} l(J_n)$$

(שני המעברים הראשונים נובעים משוויון הקבוצות, המעבר השלישי מ σ־תת אדיטיביות, הרביעי לפי ההנחה בשלילה והחמישי כיוון שהוכחנו בתרגול שמידת קטע שווה לאורכו)
ובסה"כ $m^*(E) \leq \varepsilon \sum\limits_{n=1}^{\infty} l(J_n)$. סתירה.