פרופ' בני פנקס

מתמטיקה דיסקרטית

פתרון מועד א'

סמסטר א' תשע"ח

הנחיות:

1. בטופס הבחינה שני דפים מלבד דף זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
2. בבחינה 6 שאלות.
3. הבחינה עם חומר פתוח.
4. משך הבחינה **שלוש שעות**.
5. הנכם רשאים להסתמך על סעיפים קודמים, גם אם לא השבתם עליהם.
6. **נמקו את כל תשובותיכם. פתרון ללא הוכחה לא יתקבל.**
7. ניתן להסתמך על משפטים שהוכחו במהלך ההרצאות והתרגולים בלבד ומופיעים בסיכומים המודפסים. יש לציין באופן ברור באיזה משפט נעזרים (מספר משפט ומספר הרצאה).

בהצלחה!

<u>שאלה 1 (10 נקודות)</u>

מצאו צורות DNF ו-CNF לפסוק הבא: $(p \oplus q) \wedge \neg r$

<u>פתרון שאלה 1</u>:

נמצא תחילה צורת DNF באמצעות טבלת אמת:

p	q	r	$\neg r$	$p \oplus q$	$(p \oplus q) \wedge \neg r$
T	T	T	F	F	F
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	F
F	F	F	T	F	F

ניקח את השורות בהן הערך T, ונקבל את צורת ה DNF:

$$(p \wedge \neg\, q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

כעת נמצא את צורת ה CNF. צורת ה DNF של שלילת הפסוק היא:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\ \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

נשלול את הפסוק ובעזרת דה-מורגן נקבל:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \\ \wedge (p \vee q \vee r)$$

<u>שאלה 2 (10 נקודות)</u>

הוכיחו את ההיסק הבא.

יש להוכיח בצורה פורמלית, תוך כדי ציון כללי ההיסק בכל שלב.

<u>הנחה</u>: $p(a) \vee t(a)$

<u>הנחה</u>: $\exists x: p(x) \Rightarrow q(b)$

<u>הנחה</u>: $\exists x: t(x) \Rightarrow r(c)$

<u>מסקנה</u>: $\exists x: q(x) \vee \exists x: r(x)$

<u>פתרון שאלה 2:</u>

מ-EG נובע $p(a) \Rightarrow \exists x: p(x)$ ו-$t(a) \Rightarrow \exists x: t(x)$

מדילמה קונסטרוקטבית על $p(a) \vee t(a), p(a) \Rightarrow \exists x: p(x), t(a) \Rightarrow \exists x: t(x)$ נקבל $\exists x: p(x) \vee \exists x: t(x)$.

מדילמה קונסטרוקטבית על $\exists x: p(x) \vee \exists x: t(x), \exists x: p(x) \Rightarrow q(b), \exists x: t(x) \Rightarrow r(c)$ נקבל $q(b) \vee r(c)$.

מ-EG נובע $q(b) \Rightarrow \exists x: q(x)$ ו-$r(c) \Rightarrow \exists x: r(x)$.

מדילמה קונסטרוקטיבית על $q(b) \vee r(c), q(b) \Rightarrow \exists x: q(x), r(c) \Rightarrow \exists x: r(x)$ נקבל $\exists x: q(x) \vee \exists x: r(x)$ כנדרש.

<u>שאלה 3 (20 נקודות)</u>

תהיינה A, B, C קבוצות. הוכח/הפרך:

א. $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

ב. $A \triangle B \supseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

<u>פתרון שאלה 3:</u>

א. הוכחה: נזכור שלפי הגדרת הפרש סימטרי מתקיים $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ו-$(A \triangle C) \cup (B \triangle C) = (A \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

כלומר, צריך להוכיח כי

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$.

יהי $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ כלומר $x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A)$.

נחלק ל-2 מקרים:

<u>מקרה 1</u>: $x \in A \setminus B$. כלומר, $x \in A \wedge x \notin B$.

אם $x \in C$ נקבל $x \in C \setminus B$.

אם $x \notin C$ נקבל $x \in A \setminus C$.

<u>מקרה 2</u>: $x \in B \setminus A$. כלומר, $x \in B \wedge x \notin A$.

אם $x \in C$ נקבל $x \in C \setminus A$.

אם $x \notin C$ נקבל $x \in B \setminus C$.

קיבלנו עבור כל אחד מהמקרים ש-$x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$

כנדרש.

ב. הפרכה: נגדיר את הקבוצות $A=\{a,b\},B=\{b,c\},C=\{a,c\}$.
מתקיים: $A\triangle B=\{a,c\},B\triangle C=\{a,b\},A\triangle C=\{b,c\}$.
הטענה לא מתקיימת כי $b\in(A\triangle C)\cup(B\triangle C)$ אבל $b\notin A\triangle B$.

<u>שאלה 4 (20 נקודות)</u>

תהי A קבוצה ויהי R יחס שקילות על A.
נגדיר יחס S על $A\times A$ בצורה הבאה:

$$\big((a,b),(a',b')\big)\in S\Leftrightarrow((a,a')\in R\wedge(b,b')\in R)$$

הוכיחו כי S יחס שקילות.

<u>פתרון שאלה 4</u>: נראה ש-S יחס שקילות.

רפלקסיביות: יהי $(a,b)\in A\times A$ זוג שרירותי. אזי מרפלקסיביות R נקבל $(a,a)\in R\wedge$ $(b,b)\in R$ ולכן לפי התנאי מתקיים $\big((a,b),(a,b)\big)\in S$.

סימטריות: יהיו $(a,b),(a',b')\in A\times A$ שרירותיים המקיימים $((a,b),(a',b'))\in S$. כלומר, מתקיים $(a,a')\in R\wedge(b,b')\in R$. אזי, מסימטריות R נקבל $(a',a)\in R$ ו-$(b',b)\in R$, ולכן $((a',b'),(a,b))\in S$.

טרנזיטיביות: יהיו $(a,b),(a'',b''),(a''',b''')\in A\times A$ זוגות שרירותיים המקיימים $\big((a,b),(a',b')\big)\in S\wedge\big((a',b'),(a'',b'')\big)\in S$. כלומר, מתקיים $(a,a')\in R\wedge(b,b')\in R\wedge(a',a'')\in R\wedge(b',b'')\in R$.

כעת, מטרנזיטיביות R נקבל $(a,a'')\in R\wedge(b,b'')\in R$
ולכן $\big((a,b),(a'',b'')\big)\in S$ כנדרש.

<u>שאלה 5 (20 נקודות)</u>

תהי A קבוצה.
נגדיר "סגור" אנטי סימטרי באופן הבא:
S הוא "סגור" אנטי-סימטרי של יחס R על A אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $S\subseteq R$

2. S אנטי-סימטרי
3. לכל יחס $T \subseteq A \times A$, אם $T \subseteq R$ ו T אנטי-סימטרי אזי $T \subseteq S$

א. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: לכל קבוצה A ולכל יחס R על A, קיים "סגור" אנטי-סימטרי יחיד.

ב. נשנה את התנאי השלישי לתנאי הבא:
לא קיים יחס $T \subseteq A \times A$, המקיים: $T \subseteq R$, T אנטי-סימטרי ו-$S \subset T$
הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A ולכל יחס R על A, קיים "סגור" אנטי-סימטרי (לאו דווקא יחיד).

<u>פתרון שאלה 5</u>:

א. לא נכון.
דוג' נגדית: $A = \{a, b\}$. נגדיר את היחס על A: $R = \{(a,b),(b,a)\}$.
נשים-לב כי R אינו אנטי-סימטרי.
כל היחסים המקיימים את שני התנאים הראשונים בהגדרת הסגור הם:
$S = \{(a,b)\}$, $T = \{(b,a)\}$ ו-$\emptyset$ (שלושת היחסים הם אנטי-סימטריים ומוכלים ב-R.
אבל התנאי השלישי לא מתקיים לאף אחד מיחסים אלו כי $S \nsubseteq \emptyset$ $T \nsubseteq S$ ו-$S \nsubseteq T$.

ב. הוכחה: תהי A קבוצה ויהי R יחס על A.
אם R אנטי-סימטרי, אז נגדיר את הסגור האנטי-סימטרי להיות R. ברור כי במקרה זה כל שלוש התנאים מתקיימים.
אחרת, R אינו אנטי-סימטרי. ולכן $\exists a, b \in A: (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \wedge a \neq b$.
נגדיר את S להיות היחס בו כל עבור כל זוג אברים המקיימים זאת נוריד שרירותית את אחד משני הזוגות. מדרך בניית S, ברור כי $S \subseteq R$ ו-S אנטי-סימטרי. כעת, נניח בשלילה כי קיים יחס $T \subseteq A \times A$, המקיים: $T \subseteq R$, T אנטי-סימטרי ו-$S \subset T$. אזי קיים זוג (a,b) עבורו $(a,b) \in T$ ו-$(a,b) \notin S$. מכיוון ש-$T \subseteq R$, אזי $(a,b) \in R$. כלומר, $(a,b) \in R \wedge (a,b) \notin S$. לפי הדרך בה נבנה S, בהכרח $(b,a) \in S$, וכיוון ש-$S \subset T$ נקבל ש-$(b,a) \in T$. כלומר, $(a,b) \in T \wedge (b,a) \in T$ בסתירה לכך ש-T אנטי-סימטרי.

<u>שאלה 6 (30 נקודות)</u>

תהי P קבוצה. נגדיר את הקבוצה הבאה: $Q = \{\mathcal{F} \mid P \text{ חלוקה של } \mathcal{F}\}$.

נגדיר את היחס הבא על Q: $R = \{(X,Y) \in Q \times Q \mid \forall A \in X \exists B \in Y: A \subseteq B\}$

א. הוכיחו כי R הנו יחס סדר חלקי.

ב. האם R יחס סדר מלא? הוכיחו את תשובתכם.

ג. האם קיים איבר קטן ביותר ב-Q לפי R? איבר גדול ביותר? הוכיחו את תשובתכם.

ד. האם קיים איבר R-מינימלי ב-Q? הוכיחו את תשובתכם.

ה. נשנה את ההגדרה של היחס R להגדרה הבאה:

$R = \{(X,Y) \in Q \times Q \mid \exists A \in X \forall B \in Y: A \subseteq B\}$

הוכיחו כי $\forall X \in Q: ((X,Y) \in R \Leftrightarrow Y = \{P\})$

<u>פתרון שאלה 6</u>:

א. נראה כי R יחס סדר חלקי.

רפלקסיביות: יהי $X \in Q$ שרירותי. אזי לכל $A \in X$ מתקיים $A \subseteq A$, ולכן $(X,X) \in R$.

אנטי-סימטריות: יהיו $X,Y \in Q$ שרירותיים המקיימים $(X,Y) \in R \wedge (Y,X) \in R$ ונוכיח $X = Y$, כלומר, נוכיח $\forall A(A \in X \Leftrightarrow A \in Y)$. תהי A שרירותית ונניח כי $A \in X$ (הכוון בו $A \in Y$ זהה). אזי כיוון ש-$(X,Y) \in R$ מתקיים כי קיימת קבוצה $B \in Y$ כך ש-$A \subseteq B$. מכיוון ש-$(Y,X) \in R$ מתקיים כי קיימת קבוצה $C \in X$ כך ש-$B \subseteq C$. נקבל שעבור $A,C \in X$ מתקיים $A \subseteq C$, אך כיוון ש-X חלוקה, בה כל 2 קבוצות זרות בזוגות, בהכרח $A = C$. ולכן, $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, כלומר, $A = B$. קיבלנו ש-$A \in Y$ כנדרש.

טרנזיטיביות: יהיו $X,Y,Z \in Q$ שרירותיים המקיימים $(X,Y) \in R \wedge (Y,Z) \in R$. נוכיח $(X,Z) \in R$, כלומר, נוכיח כי $\forall A \in X \exists B \in Z: A \subseteq B$. תהי A שרירותית, אזי כיוון ש-$(X,Y) \in R$ קיימת $C \in Y$ כך ש-$A \subseteq C$. כיוון ש-$(Y,Z) \in R$ נקבל שעבור הקבוצה $C \in Y$ מתקיים שקיימת $B \in Z$ עבורה $C \subseteq B$. כיוון ש-$A \subseteq C \subseteq B$, נקבל ש-$A \subseteq B$, כלומר עבור הקבוצה השרירותית $A \in X$, קיימת קבוצה $B \in Z$ עבורה $A \subseteq B$ ולכן $(X,Z) \in R$.

ב. היחס אינו יחס סדר מלא.

למשל, עבור הקבוצה $P = \{a,b,c\}$ החלוקות $X = \{\{a,b\},\{c\}\}$ ו-$Y = \{\{a\},\{b,c\}\}$ מקיימות כי $(X,Y) \notin R$ וגם $(Y,X) \notin R$.

ג. האיבר הקטן ביותר הוא החלוקה בה כל איבר הוא קבוצה בה יש איבר בודד מהקבוצה P. כלומר, בהינתן קבוצה $P = \{a_1, a_2, \dots\}$ החלוקה $X = \{\{a_1\},\{a_2\},\dots\}$ היא האיבר הקטן ביותר (יש להראות מדוע זה נכון).

האיבר הגדול ביותר היא החלוקה $X = \{P\}$ (יש להראות מדוע).

ד. לפי משפט שהוכחנו בכיתה, כל איבר קטן ביותר הוא גם מינימלי והוא גם היחיד. לכן, התשובה זהה לסעיף הקודם.

ה. תהי $X \in Q$.

נשים-לב כי לכל $A \in X$ מתקיים $A \subseteq P$ ולכן $(X, Y) \in R$ כאשר $Y = \{P\}$.

נותר להוכיח כי אם $(X, Y) \in R$ אזי $Y = \{P\}$. נניח בשלילה שלא, אזי קיימות ב-Y לפחות שתי קבוצות B_1, B_2. כעת, אם $(X, Y) \in R$ אזי קיימת $A \in X$ כך ש-$A \subseteq B_1$ וגם $A \subseteq B_2$. כלומר, קיים איבר ב-P אשר נמצא גם ב-B_1 וגם ב-B_2, בסתירה להגדרת חלוקה לפיה כל הקבוצות זרות בזוגות.