שאלה 1

תהי $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ותהי $H = \langle (1,5) \rangle \leq G$.

א. מצא הומומורפיזם $f : G \to \mathbb{Z}$ שמקיים $\ker f = H$.

ב. הוכח שיש תת־חבורה $K \leq G$ שמקיימת $H \leq K$ וגם $[G : K] = 6$.

תשובה:

א. נתבונן בהעתקה $f : G \to \mathbb{Z}$ המוגדרת על ידי $f(x,y) = y - 5x$, או $f(x,y) = yx^{-5}$ אם רושמים את הפעולה של $\mathbb{Z}$ בצורה כפלית. זה הומומרופיזם שהרי

$$f((x_1,y_1) + (x_2,y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = y_1 + y_2 - 5(x_1 + x_2) = y_1 - 5x_1 + y_2 - 5x_2 = f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2).$$

בנוסף,

$$\ker f = \{(x,y) : y - 5x = 0\} = \{(x,5x) : x \in \mathbb{Z}\} = \langle (1,5) \rangle = H.$$

הערה: איך לעלות על הרעיון הזה? יהי $f : G \to \mathbb{Z}$ הומומורפיזם כלשהו. נניח כי $f(1,0) = a, f(0,1) = b$. אזי לכל $(x,y) \in G$ מתקיים $f(x,y) = f((1,0)^x (0,1)^y) = ax + by$, כאשר רשמנו את הפעולה של G בצורה כפלית. זה אומר שכל הומומורפיזם הינו מן הצורה $f(x,y) = ax + by$ עבור a,b שלמים. אז קל למצוא a,b שיתנו את הגרעין המבוקש.

ב. ברור שההומומרפיזם f מן הסעיף הקודם הינו על, כי $f(0,y) = y$ לכל $y \in \mathbb{Z}$. לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, $G/H = G/(\ker f) \simeq f(G) = \mathbb{Z}$. אז נזהה את G/H עם $\mathbb{Z}$.

תהי $K = f^{-1}(6\mathbb{Z})$. זאת התת־חבורה של G המתאימה ל־ $6\mathbb{Z} \leq G/H$ לפי ההתאמה של משפט האיזומורפיזם הרביעי. אז $H \leq K$, וכיוון שהתת־חבורה המתאימה ל־ G/H הינה G וההתאמה שומרת אינדקסים, $[G : H] = [\mathbb{Z} : 6\mathbb{Z}] = 6$.

שאלה 2

א. הוכח או הפרך: יהיו $\sigma, \tau \in S_9$ שני איברים מסדר 12. אזי הם צמודים.

ב. מצא מונומורפיזם $f : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \to S_9$.

תזכורת: הומומורפיזם חד־חד־ערכי נקרא מונומורפיזם.

תשובה:

א. הפרכה: נתבונן בתמורות

$$\begin{aligned} \sigma &= (1234)(567) \\ \tau &= (1234)(567)(89). \end{aligned}$$

הן לא צמודות, כי יש להן מבני מחזורים שונים. מצד שני,

$$o(\sigma) = \mathrm{lcm}(4,3) = 12 = \mathrm{lcm}(4,3,2) = o(\tau).$$

ב. נגדיר $\sigma = (1234), \tau = (567)(89)$. ברור כי $o(\sigma) = 4, o(\tau) = \mathrm{lcm}(3,2) = 6$. בנוסף, $\sigma\tau = \tau\sigma$ כיוון ששתי התמורות האלה זרות. נגדיר העתקה $f : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \to S_9$ על ידי $f([a],[b]) = \sigma^a\tau^b$ לכל $a, b \in \mathbb{Z}$.

נוכיח כי f הומומורפיזם חד־חד־ערכי.

f מוגדר היטב. אכן, נניח כי $([a_1],[b_1]) = ([a_2],[b_2])$. אזי

$$\begin{aligned} a_2 &\equiv a_1 \bmod 4 \\ b_2 &\equiv b_1 \bmod 6. \end{aligned}$$

לכן קיים $c \in \mathbb{Z}$ כך ש־ $a_2 = a_1 + 4c$ ולכן

$$\sigma^{a_2} = \sigma^{a_1+4c} = \sigma^{a_1}(\sigma^4)^c = \sigma^{a_1},$$

כי $\sigma^4 = e$. כמו כן, $\tau^{b_2} = \tau^{b_1}$. לכן,

$$f([a_2],[b_2]) = \sigma^{a_2}\tau^{b_2} = \sigma^{a_1}\tau^{b_1} = f([a_1],[b_1]).$$

f הומומורפיזם: כבר שמנו לב כי σ ו־ τ מתחלפות, לכן חזקות שלהן גם מתחלפות. לכן

$$f([a_1+a_2],[b_1+b_2]) = \sigma^{a_1+a_2}\tau^{b_1+b_2} = \sigma^{a_1}\sigma^{a_2}\tau^{b_1}\tau^{b_2} = \sigma^{a_1}\tau^{b_1}\sigma^{a_2}\tau^{b_2} = f([a_1],[b_1])f([a_2],[b_2]).$$

f חד־חד־ערכי: יהי $([a],[b]) \in \ker f$. אזי $\sigma^a\tau^b = e$, או במילים אחרות $\sigma^a = \tau^{-b}$. אבל σ, ולכן כל החזקות שלה, לא מזיזה את $5,6,7,8,9$. כמו כן, חזקות של τ לא מזיזות את $1,2,3,4$. לכן, תמורה שהיא חזקה גם של σ וגם של τ לא מזיזה שום מספר, לכן חייבת להיות תמורת היחידה. כלומר, $\sigma^a = \tau^{-b} = e$. לפי תכונות הסדר, זה אומר כי $o(\sigma)|a$, כלומר $4|a$, וגם כי $6|b$. הסקנו כי $\ker f = \{([0],[0])\} = \{e_{\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6}\}$, ולכן f חד־חד־ערכי.

שאלה 3

תהי G חבורה הפועלת על הקבוצה A.

א. יהיו $a,b\in A$ שני איברים השייכים לאותו מסלול. הוכח או הפרך: המייצבים G_a ו־G_b הם חבורות איזומורפיות.

ב. יהיו $a,b\in A$ שני איברים השייכים למסלולים שונים. הוכח או הפרך: המייצבים G_a ו־G_b הם חבורות איזומורפיות.

תשובה:

א. השאלה הזאת היתה אמורה להעניק לכולם עשר נקודות חינמיות. הרי לפי שאלה במועד ב של הבוחן, שכמעט כולם נבחנו בו והאחרים מן הסתם למדו ממנו, אם a,b שייכים לאותו מסלול, אזי המייצבים G_a,G_b הם תת־חבורות צמודות של G, וידוע לנו שהצמדה באיבר קבוע הינה אוטומורפיזם של G ולכן תת־חבורות צמודות הינן איזומורפיות.

עכשיו ניתן הוכחה מפורטת. כיוון ש־ a,b שייכים לאותו מסלול, קיים $x\in G$ כך ש־ $x*a=b$. נתבונן בהעתקה

$$\begin{aligned} f: G_a &\to G_b \\ g &\mapsto xgx^{-1} \end{aligned}$$

נשים לב שאם $g\in G_a$, אזי

$$xgx^{-1}*b = xgx^{-1}*(x*a) = xg*a = x*(g*a) = x*a = b,$$

לכן התמונה של f אכן מוכלת במייצב G_b. אך $f(gh)=xghx^{-1}=xgx^{-1}xhx^{-1}=f(g)f(h)$, לכן f הומומורפיזם. הוא חד־חד־ערכי ועל כיוון שההעתקה

$$\begin{aligned} \varphi: G_b &\to G_a \\ g &\mapsto x^{-1}gx \end{aligned}$$

מספקת הפכי דו־צדדי. אז קיבלנו איזומורפיזם בין G_a ל־ G_b.

ב. הפרכה: יש המון דוגמאות. הדוגמא הבאה, או דומות לה, היו הכי נפוצות בין הפתרונות הנכונים שהוגשו. התבונן בפעולה של $G=S_3$ על עצמה על ידי הצמדה. יהיו $a=e, b=(12)$. כידוע איבר היחידה צמוד רק לעצמו, שהרי $g*e=geg^{-1}=e$ לכל $g\in G$. זה מוכיח כי $G_a=G=S_3$, והאיבר b שייך למסלול אחר. לעומת זה, במחלקת הצמידות של b יש שלושה חילופים: $(12),(13),(23)$. לפי משפט מסלול־מייצב, $|G_b|=\frac{|G|}{|\mathrm{conj}(b)|}=\frac{6}{3}=2$. המייצבים G_a,G_b לא איזומורפיים שהרי יש להם סדרים שונים.

שאלה 4

תהי G חבורה נילפוטנטית ותהי $N \trianglelefteq G$ תת־חבורה נורמלית לא־טריוויאלית. הוכח כי $N \cap Z(G) \neq \{e\}$.

רמז: יהי k המספר הכי גדול המקיים $\gamma_k G \cap N \neq \{e\}$ (מדוע הוא קיים?) והוכח כי $\gamma_k G \cap N \subseteq Z(G)$.

תשובה:

ניעזר ברמז. לפי ההגדרה של חבורה נילפוטנטית, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\gamma_n G = \{e\}$.

לכן, $\gamma_1 G \cap N = G \cap N = N \neq \{e\}$, כי הנחנו ש־ N לא־טריוויאלית, אבל $\gamma_n G \cap N = \{e\} \cap N = \{e\}$. לכן קיים $1 \leq k \leq n-1$ כך ש־ $\gamma_k G \cap N \neq \{e\}$ אך $\gamma_{k+1} G \cap N = \{e\}$.

נתבונן ב־ $H = [\gamma_k G \cap N, G]$. מצד אחד, ברור כי $H \leq [\gamma_k G, G] = \gamma_{k+1} G$. מצד שני, כיוון ש־ N נורמלית, $H \leq [N, G] \leq N$.

אכן, לכל $n \in N$ ולכל $g \in G$, הקומוטטור $[n, g] = ngn^{-1}g^{-1} = n(gn^{-1}g^{-1}) \in N$, כי הסוגריים שייכים ל־ N בגלל הנורמליות. כל איבר של $[N, G]$ הינו מכפלה של קומוטטרים כאלה, לכן שייך ל־ N. אז קיבלנו $H \leq \gamma_{k+1} G \cap N = \{e\}$.

כלומר, $[\gamma_k G \cap N, G] = \{e\}$. זה אומר שכל איבר של $\gamma_k G \cap N$ מתחלף עם כל איבר של G, או במילים אחרות $\gamma_k G \cap N \leq Z(G)$.

לכן $\{e\} \neq \gamma_k G \cap N \leq N \cap Z(G)$, ובפרט החיתוך $N \cap Z(G)$ לא טריוויאלי.

הערה: אם ניקח את המקרה $N = G$ של הטענה שעכשיו הוכחנו, נקבל שלכל חבורה נילפוטנטית יש מרכז לא טריוויאלי. בשיעור הוכחנו שכל p־חבורה סופית הינה נילפוטנטית. אז הטענה הנוכחית הינה הכללה של המשפט מן השיעור שלכל p־חבורה סופית יש מרכז לא־טריוויאלי.

שאלה 5

א. **תהי G חבורה פשוטה עם $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ איברים. מהו גודל הקבוצה $\{g \in G : o(g) = 7\}$?**

ב. **תהי G חבורה כלשהי, יהי $n \in \mathbb{N}$, ונניח שיש תת־חבורה יחידה $H \leq G$ מסדר n. הוכח כי $H \trianglelefteq G$.**

תשובה:

א. יהי n_7 מספר התת־חבורות 7־סילו של G. ברור שהסדר של כל תת־חבורה 7־סילו של G הינו 7. לפי משפט סילו השלישי, $n_7|24$ וגם $n_7 \equiv 1 \bmod 7$. מן האילוצים האלה נובע כי $n_7 \in \{1, 8\}$. אם $n_7 = 1$, אזי יש תת־חבורה 7־סילו יחידה ולכן נורמלית. זה אומר שיש תת־חבורה נורמלית של G מסדר 7, כלומר אמתית ולא־טריוויאלית, מה שסותר את הפשטות של G. לכן בהכרח $n_7 = 8$.

תהי $P \leq G$ תת־חבורה 7־סילו. לפי לגרנז', $o(g)|7$ לכל $g \in G$. כיוון ש־7 ראשוני, זה לא משאיר הרבה אופציות. יש ב־ P איבר אחד מסדר 1, שהוא איבר היחידה, וששה איברים אחרים מסדר 7. אם $P, Q \leq G$ שתי תת־חבורות 7־סילו שונות, אזי, שוב לפי לגרנז', $|P \cap Q|$ מחלק את $7 = |P|$. כיוון ש־ P, Q שונות, זה אומר כי $|P \cap Q| = 1$, כלומר $P \cap Q = \{e\}$.

לכן, איבר מסדר 7 יכול להיות שייך רק לתת־חבורה 7־סילו אחת. ולכן המספר הכללי של איברים של G מסדר 7 הינו $6 \cdot 8 = 48$.

ב. יהי $g \in G$. ידוע מן השיעור שההצמדה ב־ g,

$$\begin{aligned} \varphi_g : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

הינה אוטומורפיזם של G, ראה גם את הפתרון לשאלה השלישית במבחן הזה. זה אומר כי $gHg^{-1} = \varphi_g(H)$ הינה תת־חבורה של G, כי זו תמונה הומומורפית של תת־חבורה. כיוון ש־ φ_g אוטומורפיזם ובפרט חד־חד־ערכית, מקבלים כי $|gHg^{-1}| = |H| = n$. לכן, $gHg^{-1} \leq G$ הינה תת־חבורה של G מסדר n, ולפי ההנחה יש רק אחת כזאת. כלומר, $gHg^{-1} = H$ לכל $g \in G$. לכן $H \trianglelefteq G$ נורמלית.