

מבוא לתורת החבורות תרגיל בית 8 תשע"ח.

1. הוכיחו: אם $N \trianglelefteq G$ ו $K \leq G$ אזי:

$$NK = KN \quad (\text{א})$$

$$NK \leq G \quad (\text{ב})$$

$$NK \trianglelefteq G \text{ אז } K \trianglelefteq G \quad (\text{ג})$$

2. סימון: לכל שדה \mathbb{F} נסמן $\mathbb{F}^\times = (\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$. הוכיחו:

$$\mathbb{C}^\times / \{-1, 1\} \cong \mathbb{C}^\times \quad (\text{א})$$

$$\mathbb{C}^\times / \mathbb{T} \cong \mathbb{R}_+ \quad (\text{ב})$$

3. תהי $f : G \rightarrow H$ אפימורפיזם. ויהי $K \trianglelefteq H$. הוכיחו:

$$f^{-1}(K) \leq G \quad (\text{א})$$

$$f^{-1}(K) \trianglelefteq G \quad (\text{ב})$$

$$G/f^{-1}(K) \cong H/K \quad (\text{ג})$$

4.

(א) חשבו את כל חבורות המנה של D_4 .

(ב) חשבו את כל תת החבורות של $D_4 / \langle \sigma^2 \rangle$.

5. תהי $G = \mathbb{Z}^\infty$ כל הסדרות האינסופיות מעל \mathbb{Z} עם פעולת חיבור רכיב־רכיב. נסמן ב H את תת החבורה של הסדרות (a_i) כך ש $a_1 = 0$. למה איזומורפי G/H ?

6. תהי G חבורה ו $H, K \leq G$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $H \cong K$ אז $G/H \cong G/K$.

(ב) אם $G/H \cong G/K$ אז $H \cong K$.

7. תהי G חבורה ו $H, K \leq G$ תת חבורות נורמליות כך ש $[G : K], [G : H] = 1$. הוכיחו ש $G = KH$.