משוואות דיפרנציאליות

מה זה משוואה דיפרנציאלית?

משוואה דיפרנציאלית (מד"ר) היא משוואה על פונקציה $y(x)$, שמערבת את הנגזרות של הפונקציה, y', y'' וכו', כאשר המטרה היא למצוא פונקציה (לא בהכרח יחידה) שמקיימת את המשוואה.

לדוגמא:

1. $y' = x^2$

אנחנו מחפשים פונקציה y שהנגזרת שלה שווה לפונקציה x^2.

זה ספציפית מד"ר שאתם כבר יודעים לפתור.

$$y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

יש אינסוף פונקציות שמקיימות את המשוואה.

2. $y' = y$

מחפשים פוקנציה שווה לנגזרת שלה.

פתרון: $y = e^x$ מקיים את המשוואה.

האם יש פונקציות נוספות שמקיימות את המשוואה?

הצעה: $y = e^x + c$- לא יעבוד! כי:

$y' = e^x$

הצעה נוספת: $y = ae^x$. עובד!

גם למד"ר הזאת יש אינסוף פתרונות (ניתן להציב כל ערך של a).

3. $y = -y''$

פתרון: $y = \sin x$ ו $y = \cos x$.

האם $y = -e^{-x}$ מהווה פתרון?

$y' = e^{-x}$

$y'' = -e^{-x}$

לא עובד!

עד כה סתם "ניחשנו", בהמשך הקורס נלמד אלגוריתמים לפתרון של סוגים שונים של מד"רים.

דוגמאות נוספות למד"רים (בלי לפתור):

1. $yy' + e^{y''} - \sin x = 0$
2. $\cos y' - xy'' = \dfrac{y}{2}$
3. $(y')^2 + 3y''' + y^{(5)} = 0$

הגדרה: **סדר** של מד"ר זה הנגזרת הכי גבוהה שמופיעה במשוואה.

למשל, עבור הדוגמאות הקודמות:

1. הסדר הוא 2.
2. הסדר הוא 2
3. הסדר הוא 5.

הסבר כללי מאוד בשביל מה צריך מד"רים:

במילה אחת: פיזיקה.

ביותר מילים:

קצת ידע/ מושגים מעולם הפיזיקה:

נסמן מיקום של גוף התנועה בתור פונקציה $y(t)$. כלומר, בכל שניה, הפונקציה מחזירה לנו איפה הגוף נמצא.

הפונקציה שמתארת את המהירות של הגוף היא $y'(t)$.
הפונקציה שמתארת את התאוצה של הגוף היא $y''(t)$.
הנגזרת של המיקום= המהירות.
הנגזרת של המהירות= תאוצה.
החוק השני של ניוטון אומר

$$\sum F_i = ma$$

כלומר, אם יש לנו גוף שהמסה שלו היא m. ואנחנו מפעילים עליו כל מיני כוחות F_i, אז הגוף יתחיל לנוע והתאוצה שלו, שמסומנת באות a, מקיימת את הנוסחא שכתבנו.
כלומר, סכום הכוחות שפועלים על הגוף, שווה למסת הגוף כפול התאוצה.
נסמן את פונקציית המיקום של הגוף בy. אז $a = y''$.
נניח שאנחנו מפעילים על גוף כלשהו כח, אנחנו יודעים כמה כח אנחנו מפעילים, ועכשיו אנחנו רוצים לגלות מה יהיה המיקום של הגוף בכל שניה.
בעצם אנחנו רוצים לפתור מד"ר :

$$\sum F_i = my''$$

נניח שאנחנו מפעילים על הגוף כח קבוע.
כלומר, F שווה לאיזשהו מספר.
במקרה הזה נקבל את המד"ר הבאה :

$$F = my''$$

(F וM הם פרמטרים)

$$y'' = \frac{F}{m}$$

$$y' = \frac{F}{m}x + c$$

$$y = \frac{F}{2m}x^2 + cx + d$$

x מסמן את הזמן. לכל x שנציב בפונקציה, נגלה מה המיקום של הגוף באותה שניה.
נשים לב שהתשובה תלויה בשני הפרמטרים c, d.
התשובה הסופית תלויה ב"תנאי ההתחלה". כלומר, במקרה הזה, אנחנו צריכים לדעת איפה הגוף התחיל ובאיזה מהירות הוא התחיל.
יש מקרים שבהם הכח לא קבוע, אלא תלוי למשל במיקום הגוף. נניח כח המשיכה. ואז אנחנו יכולים לקבל משוואות יותר מסובכות, נניח :

$$\lambda y = my''$$

כלומר, יש לנו כח שפרופורציונלי למיקום של הגוף. (λ הוא איזשהו פרמטר).

הערה: כשנלמד לפתור מד"רים נראה שבכל המקרים יש יותר מפתרון אחד. כלומר, נקבל פתרון שתלוי בפרמטרים.

לפתרון הזה נקרא "הפתרון הכללי".

ניתן להוסיף נתונים נוספים, ולבקש שתמצאו פתרון פרטי שעונה על הנתונים האלה. (כלומר, לגלות את הפרמטרים)

למשל מצאו פונקציה שפותרת את המד"ר... ומקיימת $y(2) = 3$.

סוג ראשון:

נסתכל על המד"ר הבא:

$$y' = \lambda y$$

$$y' - \lambda y = 0$$

נכפיל את המשוואה בפונקציה $e^{-\lambda x}$. נשים לב שזאת פונקציה שאף פעם לא מתאפסת, אז לא שינינו את הפתרונות של המשוואה.

$$e^{-\lambda x}(y' - \lambda y) = 0$$

$$(e^{-\lambda x}y)' = 0$$

הסבר: $(e^{-\lambda x}y)' = -\lambda e^{-\lambda x}y + e^{-\lambda x}y'$

$$e^{-\lambda x}y = c$$

$$y = ce^{\lambda x}$$

דוגמא: מצאו פתרון למד"ר $y' = 2y$ שמקיים $y(1) = -5$

פתרון: הפתרון הכללי הוא

$$y = ce^{2x}$$

נציב $y(1) = -5$.

$$-5 = ce^2$$

$$c = -5e^{-2}$$

נציב בפונקציה:

$$y = -5e^{2x-2}$$

1 מד"ר לינארית מסדר

הגדרה: מד"ר לינארית מסדר ראשון היא מד"ר מהצורה

$$y' + a(x)y = b(x)$$

כאשר $a(x)$ ו$b(x)$ הם פונקציות בx.
דוגמאות:

1. $y' - \lambda y = 0$.
$a(x) = -\lambda, b(x) = 0$
2. $y' + (\sin x)y = \cos x$
$a(x) = \sin x, b(x) = \cos x$
3. $y' + e^x y = x^3 + 2x^2 - 5x + 8$
$a(x) = e^x, b(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 8$

הגדרה: מד"ר לינארית מסדר ראשון נקראת **הומוגנית** אם $b(x) = 0$.
איך פותרים מד"ר לינארית הומוגנית מסדר ראשון?

$$y' + a(x)y = 0$$

אנחנו רוצים להכפיל בביטוי מהצורה $e^{A(x)}$ עבור איזשהי פוקנציה $A(x)$. נשים לב שזה לא משנה את הפתרונות של המשוואה.

$$e^{A(x)}(y' + a(x)y) = 0$$

אנחנו רוצים למצוא $A(x)$ כך ש$e^{A(x)}(y' + a(x)y)$ יהיה נגזרת של איזשהי פוקנציה שקל לזהות.
בשביל זה צריך ש $A'(x) = a(x)$. ואז נקבל ש

$$e^{A(x)}(y' + a(x)y) = (e^{A(x)}y)'$$

$$(e^{A(x)}y)' = A'(x)e^{A(x)}y + e^{A(x)}y' = a(x)e^{A(x)}y + e^{A(x)}y'$$

$$(e^{A(x)}y)' = 0$$

$$e^{A(x)}y = c$$

$$y = ce^{-A(x)}$$

לסיכום:

$$y = ce^{-\int a(x)dx}$$

תרגיל: פתרו את המד"ר

$$y' + 2xy = 0$$

פתרון: זאת מד"ר לינארית הומוגנית, $a(x) = 2x$. אז $A(x) = x^2$.

$$y = ce^{-x^2}$$

ואם נרצה פתרון מסויים, למשל, מצאו פתרון פרטי שעובר בנקודה $(0,1)$:
עובר בנקודה $(0,1)$ הכוונה ל $y(0) = 1$.

$$1 = ce^{-0^2}$$

$$c = 1$$

כלומר הפתרון הפרטי הוא הפונקציה

$$y = e^{-x^2}$$