תרגיל 1 – פתרון

1. תהי $\mathcal{E}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב X . הראו כי לכל $A\in\sigma(\mathcal{E})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathfrak{D}\subseteq\mathcal{E}$ כך ש $A\in\sigma(\mathfrak{D})$.

הדרכה:

א. הראו כי קבוצת הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את תכונה זו הינה סיגמא אלגברה.

ב. הראו כי הקבוצות ב $\mathcal{E}$ מקיימות את תכונה זו והסיקו את הנדרש.

פתרון:

א. נסמן ב S קבוצת כל הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את התכונה ונראה כי S הינה סיגמא אלגברה:

i. ניקח $E\in\mathcal{E}$, ברור כי $X\in\sigma(E)$ ומכאן ש $X\in S$.

ii. אם $A\in S$ אזי נובע כי קיימת סדרה $\{E_n\}$ כך ש $E_n\in\mathcal{E}$ וגם $A\in\sigma(E_n,n\in\mathbb{N})$ מכאן ש $A^c\in\sigma(E_n,n\in\mathbb{N})$ ולכן $A^c\in S$.

iii. תהי $A_n\in S$. נובע כי לכל n קיימת סדרה $\{E_n^k\}$ של קבוצות כך ש $E_k^n\in\mathcal{E}$ וגם $A_n\in\sigma(E_k^n,k\in\mathbb{N})$. קל לראות כי אז $\{E_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ הינה בת מנייה וכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\sigma(E_k^n,n,k\in\mathbb{N})$ ולכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in S$.

מכאן ש S הינה סיגמא אלגברה.

ב. ברור כי לכל $E\in\mathcal{E}$ מתקיים כי $E\in\sigma(E)$ ולכן $E\in S$. מכאן נובע כי $\sigma(E)\subseteq S$ וסיימנו.

2) תהי $A\subseteq\mathbb{R}^2$. הראו שאם A קבוצה חסומה אזי $m^*(A)<\infty$.

האם ההפך נכון?

<u>פתרון:</u> אם A חסומה אזי קיים $M>0$ כך ש A מוכלת בריבוע בעל צלע M שמרכזו בראשית: $R(0,M)$

ממונוטוניות המידה החיצונית m^*:

$$A\subseteq R(0,M) \Rightarrow m^*(A)\leq m^*(R(0,M)) = M^2<\infty$$

לכן: $m^*(A)<\infty$.

נשים לב כי ההפך אינו נכון. לדוגמא, אם $A:=\mathbb{Q}^2$ אזי A אינה חסומה ומתקיים:

$$0<m^*(A)\leq\sum_{q\in\mathbb{Q}^2}m^*(\{q\}) = 0<\infty$$

סאבאדיטיביות m^*

(שכן ראינו שמידה חיצונית של נקודה היא אפס) ו-$\mathbb{Q}^2$ בת מנייה.

א)

3. לכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}^2$ ו $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}^2$ מגדירים $aE+b:=\{ax+b:x\in E\}$ (ז"א ש $aE+b$ היא תמונת E תחת הפונקציה הלינארית $x\mapsto ax+b$). הוכיחו: $m^*(aE+b)=|a|^2 m^*(E)$.

פתרון:

לגבי הזזה של קבוצה בוקטור- הוכחתם בהרצאה את האינוריאנטיות להזזות: $m^*(aE+b)=m^*(aE)$.

לכן נראה כאן רק $m^*(aE)=|a|^2 m^*(E)$.

המקרה בו $a=0$ הינו טריויאלי שכן אז $aE=0$. נוכיח ל $a\neq 0$.

למה: O כיסוי פתוח של E אם ורק אם aO כיסוי פתוח של aE .

<u>הוכחה:</u>

$\Leftarrow$: הפונקציה $x\mapsto ax$ פתוחה (ההופכית שלה רציפה) ולכן aO קבוצה פתוחה. בנוסף,

$aO=a\left[(E\cap O)\cup(O\setminus E)\right]=a\left(E\cup(O\setminus E)\right)=aE\cup a(O\setminus E)$,

ומכאן $aE\subseteq aO$.

ולכן aO כיסוי פתוח של aE .

$\Rightarrow$: באותו אופן ע"י $x\mapsto\frac{1}{a}x$. משל.

כעת, נשים לב כי $\bigcup_{n=1}^{\infty}aP_n=a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n\right)$ ומכאן ש

$$\begin{aligned}
m^*(aE)&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}s(P_n)\mid aE\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n, P_n \text{ is a rectangle}\}\\
&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}s(aP_n)\mid E\subseteq a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n\right)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}aP_n\right), P_n \text{ is a rectangle}\}\\
&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}|a|^2 s(P_n)\mid E\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n\right), P_n \text{ is a rectangle}\}\\
&=|a|^2\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}s(P_n)\mid E\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n\right), P_n \text{ is a rectangle}\}\\
&=|a|^2 m^*(E)
\end{aligned}$$

משל.

ב) נתון כי A מדידה לבג. האם $aA+b$ מדידה לבג?

<u>פתרון</u>: A מדידה לבג, ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיימת קב' אלמנטרית E_ε כך ש $\rho(A,E_\varepsilon)<\varepsilon|a|^{-2}$. אולם לפי סעיף א':

$$m^*(a(A\Delta E_\varepsilon)+b)=|a|^2 m^*(A\Delta E_\varepsilon)=|a|^2\rho(A,E_\varepsilon)<\varepsilon$$

ולכן: $\rho(aA+b,aE_\varepsilon+b)=m^*(a(A\Delta E_\varepsilon)+b)<\varepsilon$

כעת E_ε אלמנטרית ולכן גם $aE_\varepsilon+b$ כזו. הנ"ל נכון לכל $\varepsilon>0$, ולכן $aA+b$ קרובה ρ- כרצוננו לקב' אלמנטרית $\Leftarrow$ $aA+b$ מדידה לבג.

4. **הגדרה:** נאמר שקבוצה $G\subseteq\mathbb{R}^2$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

תהי $E\subseteq\mathbb{R}^2$ הוכיחו שקיימת קבוצה $G\in G_\delta$ המקיימת $E\subseteq G$ וכן $m^*(G)=m^*(E)$.

פתרון:

תהי $E\subseteq\mathbb{R}^2$. עפ"י ההדרכה, נמצא קבוצה פתוחה O כך ש $m^*(O)<m^*(E)+\varepsilon$. מכיוון שהמידה החיצונית של קבוצה הינה האינפימום על סכום של שטחים של מלבנים שאיחודם מכסה את E נקבל כי קיימים מלבנים $\{P_k\}$ המכסים את E כך ש $\sum_{k=1}^{\infty}s(P_k)<m^*(E)+\varepsilon$. מכאן שאם נסמן $\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k=O$, נקבל כי O הינה קבוצה פתוחה המקיימת $m^*(O)\le\sum_{k=1}^{\infty}s(P_k)<m^*(E)+\varepsilon$. נבנה סדרה של קבוצות פתוחות $\{O'_m\}$ כך ש $m^*(O'_m)<m^*(E)+\frac{1}{m}$. נסמן $O=\bigcap_{m=1}^{\infty}O_m$. זוהי קבוצה ב G_δ. מהמונטוניות של המידה נקבל

$\forall m\in\mathbb{N}\quad m^*(E)\le m^*(O)=m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}O_m\right)<m^*(E)+\frac{1}{m}$. נשאיף לאינסוף ונקבל את הפתרון.

5) עבור $x\in[0,1)$ נסמן ב- $x=0.x_1x_2\dots$ את הפיתוח העשרוני של x.

תהי $A:=\{x \mid x\in[0,1),\ x_6\le 5\}$

(1) הוכיחו כי $m^*(A)=0.6$.

(2) האם A מדידה לבג?

<u>פתרון:</u>

(1) נשים לב ש A היא איחוד זר של קטעים מהצורה

$$\bigcap_{j=1}^{6}\{x \mid x_j=a_j\}=[0.a_1a_2..a_6,\ 0.a_1a_2..a_6 9999\dots)$$

כאשר האיחוד הוא על פני: $1\le k\le 5$; $a_k\in\{0,..,9\}$

ו- $a_6\in\{0,..,5\}$.

נשים לב: אורך כל אחד מהקטעים (הנ"ל) באיחוד הינו 10^{-6}.

ומספרם שווה למספר האפשרויות לבחור את $a_1,..,a_6$, שהוא:

$$6\cdot\prod_{k=1}^{5}10=6\cdot 10^5$$

לכן: $m^*(A) = 10^{-6}(\underbrace{6 \cdot 10^5}_{\text{מספר הקטעים באיחוד}}) = 0.6$

10^{-6}: אורך כל קטע

(2) ולפי הנ"ל A מדידה לבג כאיחוד של מספר סופי (בפרט-בז"מ) של קטעים,

ו- $m(A) = 0.6$.