<u>תרגול 2</u>

<u>תזכורת</u>

בשיעור שעבר הגדרנו עבור מטריצה ריבועית A ערך עצמי (λ) ווקטור עצמי (v) ז"א סקלר λ ווקטור v שעבורם מתקיים $Av=\lambda v$.

הראינו כיצד למצוא את הערכים העצמיים וכיצד למצוא לכל ערך עצמי את הבסיס למרחב העצמי המתאים לו.

כעת נגדיר ערך עצמי ווקטור עצמי עבור העתקה ליניארית $T:V\to V$. (העתקה ליניארית היא פונקציה שעבורה $\forall v_1,v_2\in V,\alpha\in F$ מתקיים $T(v_1+\alpha v_2)=T(v_1)+\alpha T(v_2)$.

<u>הגדרה</u>

תהא $T:V\to V$ העתקה ליניארית וסקלר λ ונניח שקיים וקטור שונה מאפס v שעבורו מתקיים $T(v)=\lambda v$. כל וקטור המקיים יחס זה נקרא וקטור עצמי של T השייך לערך העצמי λ.

<u>דוגמא</u>

תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(2x+y,y-z,2y+4z)$.

$T(1,1,-2)=3\cdot(1,1,-2)$ ולכן $(1,1,-2)$ הוא וקטור עצמי ו 3 הוא ערך עצמי.

<u>כיצד נמצא וקטור עצמי וערך עצמי להעתקה ליניארית?</u>

<u>תזכורת</u>

עבור העתקה ליניארית $T:V\to V$ קיימת מטריצה $[T]$ שנקראת ההצגה המטריצית של T כך שלכל וקטור $v\in V$ מתקיים $[T][v]=[T(v)]$. (נזכור ש $[v]$ הוא וקטור הקוארדינטות של v ביחס לבסיס הסטנדרטי ו $[T(v)]$ הוא וקטור הקוארדינטות של $T(v)$ ביחס לבסיס הסטנדרטי.

הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה $[T]$ הם הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של ההעתקה הליניארית $T:V\to V$.

<u>תרגיל</u>

תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(2x+y,y-z,2y+4z)$.

א. מצא את הערכים העצמיים של ההעתקה הליניארית.
ב. לכל ערך עצמי שמצאת בסעיף א מצא את הבסיס למרחב העצמי המתאים לו.

<u>פתרון</u>

א. תחילה נמצא את המטריצה $[T]$. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ הוא $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$\begin{aligned}T(1,0,0)&=(2,0,0)=2\cdot(1,0,0)+0\cdot(0,1,0)+0\cdot(0,0,1)\\T(0,1,0)&=(1,1,2)=1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0)+2\cdot(0,0,1)\\T(0,0,1)&=(0,-1,4)=0\cdot(1,0,0)-1\cdot(0,1,0)+4\cdot(0,0,1)\end{aligned}$$

ולכן

$$[T]=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמיים כפי שלמדנו בשיעור שעבר.

הפולינום האופייני הוא $f_{[T]}=|\lambda I-[T]|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda-1&1\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$.

הערכים העצמיים הם $\lambda=2,\lambda=3$.

ב.עבור $\lambda=2$ הבסיס למרחב העצמי הוא $\{(1,0,0)\}$. עבור $\lambda=3$ הבסיס למרחב העצמי הוא $\{(1,1,-2)\}$.

תזכורת

מטריצה B דומה למטריצה A אם קיימת מטריצה לא סינגולארית P כך ש $B=P^{-1}AP$.

נשים לב ש $B^n=\overbrace{\left(P^{-1}AP\right)\cdot\left(P^{-1}AP\right)\cdot\ldots\cdot\left(P^{-1}AP\right)}^{n-times}=P^{-1}A^nP$.

הגדרה

נאמר שמטריצה ריבועית A לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית D ז"א קיימת מטריצה לא סינגולארית P ומטריצה אלכסונית D כך ש $D=P^{-1}AP$.

הערה

אם A לכסינה אז ניתן לחשב את A^n באופן הבא: $D=P^{-1}AP\Rightarrow A=PDP^{-1}\Rightarrow A^n=PD^nP^{-1}$

ומכיוון ש D מטריצה אלכסונית ניתן לחשב את D^n בקלות ולקבל את A^n.

דוגמא

חשב את A^{10} כאשר $A=\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}$.

נשים לב ש $P^{-1}\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}5&0\\0&-2\end{pmatrix}$ כאשר $P=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}$ ואז $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&\frac{1}{7}\\-\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\end{pmatrix}$.

נראה בתרגיל הבא כיצד להראות שמטריצה היא לכסינה ואם היא לכסינה כיצד ניתן לחשב את המטריצה ההפיכה P והמטריצה האלכסונית D.

$$\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}5&0\\0&-2\end{pmatrix}P^{-1}\Rightarrow A^{10}=P\begin{pmatrix}5^{10}&0\\0&(-2)^{10}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

תרגיל

הראה שהמטריצה $A=\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}$ לכסינה ומצא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D שעבורן מתקיים השוויון $D=P^{-1}AP$.

פתרון

תחילה נמצא את הערכים העצמיים.

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2\\-3&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+1)-6=\lambda^2-3\lambda-10=(\lambda-5)(\lambda+2)$$

הערכים העצמיים הם: $\lambda=5,\lambda=-2$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור הערך העצמי $\lambda=-2$.

ז"א יש למצוא את הבסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}-6&-2\\-3&-1\end{pmatrix}$ שהוא $\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\}$.

הבסיס של המרחב העצמי המתאים לערך העצמי $\lambda=5$ הוא הבסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}1&-2\\-3&6\end{pmatrix}$ שהוא $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

קיבלנו שני ווקטורי עצמיים בת"ל המטריצה היא 2 ריבועית ומכיוון שמספר הווקטורים העצמיים שהם בת"ל שווה לגודל המטריצה אז המטריצה ניתנת ללכסון. המטריצה האלכסונית D היא מטריצה שבאלכסון

מופיעים הערכים העצמיים ז"א $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ והמטריצה P היא המטריצה שעמודותיה הם הוקטורים העצמיים כלומר $P=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ הווקטור העצמי שמתאים לערך העצמי 5 נמצא בעמודה הראשונה מכיוון שבמטריצה האלכסונית הערך העצמי 5 מופיע בעמודה הראשונה באותו אופן ניתן להבין כיצד הגענו לעמודה השנייה.

<u>תזכורת</u>

תהי P מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס B' במרחב וקטורי V. (ז"א לכל וקטור $v \in V$ מתקיים $P \cdot [v]_{B'} = [v]_B$) אזי עבור כל העתקה ליניארית $T: V \to V$ מתקיים $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$.

<u>מסקנה</u>

אם $[T]_{B'}$ לכסינה אז קיים בסיס B כך ש $[T]_B$ אלכסונית

<u>הגדרה</u>

העתקה ליניארית $T: V \to V$ נקראת לכסינה אם קיים בסיס B כך שהמטריצה $[T]_B$ אלכסונית.

<u>דוגמא</u>

הראה שהעתקה ליניארית $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $T(a,b) = (\frac{3a-b}{2}, \frac{3b-a}{2})$ לכסינה ומצא בסיס B כך ש $[T]_B$ אלכסונית.

<u>פתרון</u>

$T(a,b) = (\frac{3a-b}{2}, \frac{3b-a}{2})$ המטריצה המתאימה לפי הבסיס הסטנדרטי היא $\begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$

לאחר מציאת ערכים עצמיים והפעלת אלגוריתם ללכסון מטריצה נקבל כי המטריצה המייצגת את T הינה

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

כאשר $B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\}$

לכן לפי התכונות של מטריצה מייצגת מתקיים

$$Tv_1 = v_1, Tv_2 = 2v_2$$