תרגיל 8

א. פונקציה מכיוון שלכל $x\in Z$ קיים y יחיד שעבורו $x^2=y\in Z$.

ב. לא פונקציה מכיוון שקיים $x\in R$ לדוגמא $\frac{1}{2}$ שעבורו לא קיים y המקיים $x^2=y\in Z$ $(\frac{1}{4}\notin Z)$

ג. פונקציה אותו נימוק כמו בסעיף א ד. פונקציה (הייה בתרגול).

תרגיל 9

א. נתון ש A,B קבוצות לא ריקות. יהי $b\in B$

נגדיר פונקציה $g:A\to A\times B$ ע"י לכל $a\in A$ $g(a)=(a,b)$.

נוכיח ש g חח"ע: יהיו $a_1,a_2\in A$ ונניח ש $g(a_1)=g(a_2)$ ז"א $(a_1,b)=(a_2,b)$ על פי הגדרת זוג סדור $a_1=a_2$.

תרגיל 10

א..

ב. f חח"ע- יהיו $n_1,n_2\in R$ כך ש $f(n_1)=f(n_2)$ ז"א ${n_1}^3={n_2}^3$ כעת ${n_1}^3={n_2}^3 \leftrightarrow {n_1}^3-{n_2}^3=0\leftrightarrow (n_1-n_2)({n_1}^2+n_1n_2+{n_2}^2)=0$ לא קיימים $n_1,n_2\in R$ שעבורם ${n_1}^2+n_1n_2+{n_2}^2=0$ ולכן הפתרון היחיד הוא $n_1=n_2$.

f על- יהי $n\in R$ נתבונן במשוואה $x^3-n=0$ מכיוון שהחזקה של הפולינום היא אי זוגית נקבל לפחות פתרון ממשי אחד נסמנו ב $\sqrt[3]{n}$. כעת $f\left(\sqrt[3]{n}\right)=\left(\sqrt[3]{n}\right)^3=n$.

ולכן f הפיכה. הפונקציה ההופכית היא $g(n)=\sqrt[3]{n}$ נראה שפונקציה זו היא אכן הפונקציה ההופכית $f(g(n))=f(\sqrt[3]{n})=(\sqrt[3]{n})^3=n$ וכן $g(f(n))=g(n^3)=\sqrt[3]{n^3}=n$, ולכן $f\circ g=g\circ f=I$.

ג. f חח"ע- יהיו $n_1,n_2\in Q$ כך ש $f(n_1)=f(n_2)$ ז"א כך ש $2^{n_1}=2^{n_2}$ ולכן $n_1=n_2$.

f אינה על מכיוון שלא קיים מספר רציונאלי עבורו $2^n=3$ למשל.

ד. f חח"ע- יהיו $B_1,B_2\in P(A)$ ונניח ש $f(B_1)=f(B_2)$ ז"א $A\setminus B_1=A\setminus B_2$ נוכיח ש $B_1=B_2$

נוכיח תחילה ש $B_1\subseteq B_2$

יהי $x\in B_1$ מכיוון ש $B_1\in P(A)$ עלפי הגדרת החזקה $B_1\subseteq A$ ולכן $x\in A$ מכיוון ש $A\setminus B_1=A\setminus B_2$ נקבל ש $x\notin A\setminus B_2$ ז"א $x\notin A\vee x\in B_2$ אבל $x\in A$ ולכן בהכרח $x\in B_2$.

באותו אופן ניתן להוכיח ש $B_2\subseteq B_1$.

f על- יהי $B\in P(A)$ נתבונן ב

$$f(A\setminus B)=A\setminus(A\setminus B)=A\cap\left(A\cap B^c\right)^c=A\cap\left(A^c\cup B\right)=\left(A\cap A^c\right)\cup\left(A\cap B\right)=B$$

השוויון הראשון-נובע מהגדרת f. השוויון השני-נובע מהתרגול. השוויון השלישי- דה מורגן השוויון הרביעי-דסטריביוטיביות

השוויון החמישי-נתון ש $B\in P(A)$ על פי הגדרת החזקה $B\subseteq A$ הובחנו בתרגול שאם $B\subseteq A$ אז $A\cap B=B$.

קיבלנו ש f הפיכה והפונקציה ההופכית $g(B)=A\setminus B$.

$f\left(g(B)\right)=f\left(A\setminus B\right)=A\setminus\left(A\setminus B\right)=B$ באותו אופן $g\left(f\left(B\right)\right)=B$ ולכן $f\circ g=g\circ f=I$.

ה. F חח"ע- יהיו $A_1, A_2 \in P(X)$ כך ש $f(A_1) = f(A_2)$ ז"א $\{f(a) | a \in A_1\} = \{f(a) | a \in A_2\}$
נוכיח ש $A_1 = A_2$ תחילה נוכיח ש $A_1 \subseteq A_2$.
יהי $x \in A_1$ ולכן $f(x) \in \{f(a) | a \in A_1\} = \{f(a) | a \in A_2\}$ מכיוון ש f חח"ע $x \in A_2$ כי אחרת
(ז"א אם $x \notin A_2$) נקבל ש $f(x) \in \{f(a) | a \in A_2\}$ ז"א קיים $y \in A_2$ כך ש $f(x) = f(y)$ מכיוון
שמצד אחד $x \notin A_2$ ומצד שני $y \in A_2$ נקבל ש $x \neq y$ בסתירה לנתון ש f חח"ע.
F לא בהכרח על- כי f לא על אז קיים $y \in Y$ כך שעבורו לא קיים x כך ש $f(x) = y$ ובפרט לא קיים
$A \in P(X)$ כך ש $y \in \{f(a) | a \in A\}$ ובפרט $\{y\} \neq \{f(a) | a \in A\}$ ומהגדרת החזקה $\{y\} \in P(Y)$.
ו. F לא בהכרח חח"ע- הוכחה דומה להוכחה ש F לא על בסעיף הקודם.
F על- יהי $B \in P(Y)$ על פי הגדרת החזקה $B \subseteq Y$ מכיוון ש f על לכל $b \in B$ קיים $a \in X$ כך ש
$f(a) = b$ נתבונן בקבוצה $A = \{f^{-1}[B]\}$ ולכן $B = \{f(a) | a \in A\}$.

תרגיל 11
א.
$$x \in f^{-1}[D_1 \cup D_2] \leftrightarrow f(x) \in D_1 \cup D_2 \leftrightarrow f(x) \in D_1 \vee f(x) \in D_2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in f^{-1}[D_1] \vee x \in f^{-1}[D_2] \leftrightarrow x \in f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2]$$
כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.
ב.
$$x \in f^{-1}[D_1 \cap D_2] \leftrightarrow f(x) \in D_1 \cap D_2 \leftrightarrow f(x) \in D_1 \wedge f(x) \in D_2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in f^{-1}[D_1] \wedge x \in f^{-1}[D_2] \leftrightarrow x \in f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2]$$
כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.
ג.
דוגמא נגדית
נניח ש $X = \{1,2\}, Y = \{1,2,3\}$ ונגדיר פונקציה $f : X \to Y$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים $f(x) = x$
כעת נניח ש $C = \{1\}$ ואז $C^c = \{2\}$.
$f[C^c] = \{2\} \neq \{2,3\} = (f[C])^c$.
ד.
$$x \in f^{-1}[D^c] \leftrightarrow f(x) \in D^c \leftrightarrow f(x) \notin D \leftrightarrow x \notin f^{-1}[D] \leftrightarrow x \in (f^{-1}[D])^c$$
כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.
ה.
דוגמא נגדית
נניח ש $X = \{1,2\}, Y = \{1\}$ $X = \{1,2\}, Y = \{1,2,3\}$ ונגדיר פונקציה $f : X \to Y$ כך שלכל $x \in X$
מתקיים $f(x) = 1$ נניח ש $C_1 = \{1,2\}, C_2 = \{2\}$.
$f[C_1 \setminus C_2] = \{1\} \neq \varnothing = f[C_1] \setminus f[C_2]$.
ו.
$$x \in f^{-1}[D_1 \setminus D_2] \leftrightarrow f(x) \in D_1 \setminus D_2 \leftrightarrow f(x) \in D_1 \wedge f(x) \notin D_2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in f^{-1}[D_1] \wedge x \notin f^{-1}[D_2] \leftrightarrow x \in f^{-1}[D_1] \setminus f^{-1}[D_2]$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.

תרגיל 12

א.

$$x \in (g \circ f)^{-1}[D] \leftrightarrow (g \circ f)(x) \in D \leftrightarrow g\left(f(x)\right) \in D \leftrightarrow f(x) \in g^{-1}[D] \leftrightarrow x \in f^{-1}\left[g^{-1}[D]\right]$$

ב.

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f)(a) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)\left(g\left(f(a)\right)\right) = f^{-1}\left(f(a)\right) = a$$

באותו אופן

$$(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(a) = a \,.$$