

# מתמטיקה בדידה (83-116)

## שיעור חזרה

### יש לענות על 4 שאלות מתוך 6

ערך כל שאלה 25 נק'.

יש לציין בתחילת המחברת אילו 4 שאלות לבדוק ולרשום "טיוטא" על דפים שאינם מיועדים לבדיקה.

### שאלה 1:

א. (15 נק') הוכח או הפרך: אם  $A \cap B \subseteq \bar{C}$  וגם  $A \cup C \subseteq B$  אז  $A \cap C = \emptyset$ .

ב. (10 נק') הוכח או הפרך:  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$  אם ורק אם  $C \subseteq A$ .

פתרון:

א. נציין ש-לא קיים איבר של A ב-C אמ"מ לא קיים איבר של C ב-A אמ"מ  $A \cap C = \emptyset$ .

ב.  $A \cup C \subseteq B$  בפרט  $A \subseteq B$  לכן  $A = A \cap B \subseteq \bar{C}$  ולכן כל איברי A לא ב-C.

ב. נניח ש  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ .

נקח  $x \in A \iff x \in (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff x \in C$ .

נניח ש  $C \subseteq A$ . ע"ס דיסטריוטיביות של חיתוך על איחוד נקבל:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup C$$

### שאלה 2:

א. (5 נק') הגדירו מהו יחס רפלקסיבי.

נסמן  $B = P(N)$  ונגדיר יחס R על B ע"י  $(A_1, A_2) \in R$  כאשר  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ .

ב. האם R רפלקסיבי/ סימטרי/ טרנזיטיבי? הוכח תשובתך (10 נקודות).

ג. מצא איבר שיש להוריד מ B כדי שתשובתך ל א' תתהפך. הוכח תשובתך. (10 נקודות).

פתרון:

א. יהי R יחס על קבוצה A. R רפלקסיבי אם לכל  $a \in A$  מתקיים  $aRa$ .

ב. לא רפלקסיבי כי  $\phi \in P(N) \wedge \phi \cap \phi = \phi$  ולכן קיים איבר ב-B שאינו מתייחס לעצמו ביחס ל-R.

סימטרי כי  $ARB \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset \Rightarrow BRA$

לא טרנזיטיבי כי

$$\{1,2\} \cap \{2,3\} \neq \emptyset \wedge \{2,3\} \cap \{3,4\} \neq \emptyset \wedge \{1,2\} \cap \{3,4\} = \emptyset$$

↓

$$\{1,2\}R\{2,3\} \wedge \{2,3\}R\{3,4\} \text{ but } \{1,2\} \not R \{3,4\}$$

ג. נוריד את הקבוצה הריקה מ-B. כלומר, כעת כל איבר ב-B לא ריק ולכן כל חיתוך של איבר ב-B עם עצמו שווה לעצמו ולכן לא ריק. כתוצאה מכך כל איבר ב-B מתייחס לעצמו ביחס ל-R.

### שאלה 3:

יהיו  $f: A \rightarrow B$  ו  $g: V \rightarrow W$  פונקציות.

נגדיר  $h: A \times V \rightarrow B \times W$  ע"י לכל  $a \in A, v \in V$   $h(a, v) := (f(a), g(v))$ .

א. (9 נק') הוכח/הפרך אחד מהסעיפים i-ii:

i. הוכח או הפרך: אם  $f, g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.

$h(a, v) = h(x, y)$  : ניקח

$(f(a), g(v)) = (f(x), g(y))$  : לכן

$f(a) = f(x) \wedge g(v) = g(y)$  : משויון קואורדינטה - קואורדינטה

$a = x \wedge v = y$  : חח"ע  $f, g$

$(a, v) = (x, y)$  : ולכן

ii. הוכח או הפרך: אם  $f$  על  $B$  ו  $g$  על  $W$  אז  $h$  היא על  $B \times W$ .

$$\forall (s, t) \in B \times W \quad \underbrace{\exists a \in A : f(a) = s \wedge \exists v \in V : g(v) = t}_{\text{כי } f, g \text{ על}} \Rightarrow \exists (a, v) : h(a, v) = (f(a), g(v)) = (s, t)$$

ב. (8 נק') נגדיר  $H: P(A \times V) \rightarrow P(B \times W)$  ע"י  $H(X \times Y) = (X \times Y) \cap (B \times W)$ .

הוכיחו כי  $H$  חח"ע אם ורק אם  $A \times V \subseteq B \times W$ .

\*אם  $A \times V \subseteq B \times W$  אז לכל  $X \times Y \subseteq A \times V$  מתקיים  $X \times Y \subseteq B \times W$  ולכן

$$H(X \times Y) = (X \times Y) \cap (B \times W) = (X \times Y)$$

לקבוצה שמכילה אותה נקראת שיכון).

\*  $H$  חח"ע.

נניח שלא מתקיים  $A \times V \subseteq B \times W$ , אזי קיים איבר  $x$  ב-  $A \times V$  שאיננו ב-  $B \times W$ . כתוצאה

מכך  $\{x\}, \emptyset \in P(A \times V)$  כך ש-

$$H(\emptyset) = \emptyset \cap B \times W = \emptyset = \{x\} \cap B \times W = H(\{x\})$$

אבל  $\{x\}$  שונה מ-  $\emptyset$ , בסתירה לכך ש-  $H$  חח"ע.

ג. (8 נק') יהיו  $B, A$  קבוצות שוות עוצמה, ויהיו  $D, C$  קבוצות שוות עוצמה. הוכח

$$|A \times C| = |B \times D|$$

$\exists f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D$  קבוצות שוות עוצמה ו- $D, C$  קבוצות שוות עוצמה, לכן  $f$  הפיכה,  $g$  הפיכה.  
נגדיר  $h : A \times C \rightarrow B \times D$  באופן הבא:  $h(a, c) = (f(a), g(c))$  ונראה שהיא הפיכה להוכחת המבוקש.  
(ניתן להראות חח"ע על של  $h$ , או לתת הפיכה ולהוכיח שהיא נותנת ID משני הכיוונים).  
טענה-  $h^{-1}(x, y) = (f^{-1}(x), g^{-1}(y))$  כי  $f, g$  הפיכות. נוכיח שהיא אכן הופכת את  $h$ :

$$hh^{-1}(x, y) = h(f^{-1}(x), g^{-1}(y)) = \underbrace{(ff^{-1}(x), gg^{-1}(y))}_{\text{כי } f, g \text{ הן ההופכיות של } f^{-1}, g^{-1}} = (x, y)$$

$$h^{-1}h(a, c) = h^{-1}(f(a), g(c)) = \underbrace{(f^{-1}f(a), g^{-1}g(c))}_{\text{כי } f^{-1}, g^{-1} \text{ הן ההופכיות של } f, g} = (a, c)$$

#### שאלה 4:

א. (12 נק') בדוק האם שני הפסוקים שקולים, ללא שימוש בטבלת אמת:  
 $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg p) ; p \rightarrow \neg(q \rightarrow r)$

ב. (13 נק') פשטו את הביטוי:  $(r \rightarrow p) \wedge \neg r \wedge (q \rightarrow \neg r)$ .

פתרון:

א. הוכחנו ש-  $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$  ולכן:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p) \equiv \neg p \vee (q \wedge \neg r) \equiv p \rightarrow (q \wedge \neg r) \equiv p \rightarrow \neg(\neg q \vee r) \equiv p \rightarrow \neg(q \rightarrow r)$$

ב. הוכחנו בכיתה כי  $A \wedge (B \vee A) \equiv A$  ולכן:

$$(r \rightarrow p) \wedge \neg r \wedge (q \rightarrow \neg r) \equiv (\neg r \vee p) \wedge \neg r \wedge (\neg q \vee \neg r) \equiv \neg r$$

#### שאלה 5:

א. (13 נק') מצאו את מספר פתרונות המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 70$ , כך שהמשתנים בעלי אינדקס זוגי גדולים מ-5 והמשתנים בעלי האינדקס האי זוגי הם לפחות 4.

ב. (12 נק') מטילים 8 קוביות שונות. מהו מספר התוצאות האפשריות בהן מופיע כל אחד מהמספרים 1 עד 6 לפחות פעם אחת (כלומר, סדר התוצאות משנה)?  
(הערה: אין קשר בין הסעיפים).

פתרון

א.

$$y_i \begin{cases} = x_i - 6 \geq 0, i = 2,4 \\ = x_i - 4 \geq 0, i = 1,3,5 \end{cases} \text{ מבקשים } x_1 + \dots + x_5 = 70 : x_i \begin{cases} > 5, i = 2,4 \\ \geq 4, i = 1,3,5 \end{cases} \text{ נגדיר משתנים חדשים:}$$

ונקבל  $y_i \geq 0$  :  $y_1 + \dots + y_5 = x_1 + \dots + x_5 - 12 - 12 = 70 - 24 = 46$  אשר הוכחנו בכיתה כי מספר הפיתרונות עבורו הוא כמספר הבחירות של 46 מתוך 5 עם חזרות ובלי חשיבות לסדר:

$$\binom{46+5-1}{5-1}$$

ב. נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה. נגדיר:

נגדיר:

$U$  - קבוצת כל ההטלות האפשריות. ללא המגבלה זוהי בחירה של 8 מ-6 עם חזרות ועם חשיבות לסדר:

$$|U| = 6^8 \quad |A_i| = 5^8 \quad |A_i^c| = |U| - |A_i| \quad \text{לכן מבקשים } \left| \bigcap_{i=1}^6 A_i^c \right| = |U| - \left| \bigcup_{i=1}^6 A_i \right|$$

$$\left. \begin{cases} |A_1| = 5^8 & \text{קבוצת ההטלות בהן המספר 1 לא הופיע.} \\ |A_2| = 5^8 & \text{קבוצת ההטלות בהן המספר 2 לא הופיע.} \\ \vdots \\ |A_6| = 5^8 & \text{קבוצת ההטלות בהן המספר 6 לא הופיע.} \end{cases} \right\} \binom{6}{1} |A_i| = 6 |A_i|$$

כמו כן לכל  $1 \leq i < j \leq 6$  ויש  $|A_i \cap A_j| = 4^8$  דרכים לבחירת צמד קבוצות.

לכל  $1 \leq i < j \leq 6$  ויש  $|A_i \cap A_k \cap A_j| = 3^8$  דרכים לבחירת שלישיית קבוצות.

וכן הלאה...

נקבל,

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_6}| = 6^8 - \binom{6}{1} 5^8 + \binom{6}{2} 4^8 - \binom{6}{3} 3^8 + \binom{6}{4} 2^8 - \binom{6}{5} 1^8 + \binom{6}{6} 0^8$$

### שאלה 6:

מצא נוסחת נסיגה (כולל תנאי התחלה) למספר הדרכים לבניית מספר טבעי מאורך n בו

א. (13 נק') זוגיות כל סיפרה שונה מזוגיות הסיפרה שאחריו.

ב. (12 נק') אין שתי ספרות זוגיות רצופות.

יהי  $A_i$  מספר חוקי מאורך  $i$ , ו- $f(i)$  מספר הדרכים ליצור אותו.  
 נחפש  $f(n)$ . (נסמן באופן לא פורמלי  $f^{(r)}(i)$  עבור מספר המספרים מאורך  $i$  שנגמרים בסיפרה זוגית, ו- $f^{(r's)}(i)$  עבור מספר המספרים מאורך  $i$  שנגמרים בסיפרה אי זוגית).

א. (13 נק') זוגיות כל סיפרה שונה מזוגיות הסיפרה שאחריו.

$$\begin{array}{r} \underline{A_{n-1}} \quad \underline{\quad} \\ \text{ז} \quad \text{5אפ'} \\ \text{5אפ'} \quad \text{א"ז} \end{array}$$

$$f(n) = 5f^{(r)}(n-1) + 5f^{(r's)}(n-1) = 5f(n-1)$$

$$f(1) = 9$$

ב. (12 נק') אין שתי ספרות זוגיות רצופות.

$$\begin{array}{r} \underline{A_{n-1}} \quad \underline{\quad} \\ \text{5אפ'} \quad \text{ז-5אפ'} \\ \text{10אפ'} \quad \text{א"ז-5אפ'} \end{array}$$

$$f(n) = 5 \cdot 5f^{(r)}(n-1) + 5 \cdot 10f^{(r's)}(n-1) = 5f(n-1) + 5 \cdot 5f^{(r's)}(n-1) = 5f(n-1) + 5 \cdot 5f(n-2)$$

$$f(1) = 9$$

$$f(2) = 5 \cdot 10 + 4 \cdot 5$$

בהצלחה!