תרגיל: יהיו G_1, G_2 חבורות ו$H_1 \trianglelefteq G_1, H_2 \trianglelefteq G_2$ הוכיחו ש$H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$.
פתרון: בשביל להוכיח שתת חבורה היא נורמלית מספיק והכרחי להוכיח שהיא סגורה להצמדות.
כלומר, יהי $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$, ו$(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ צריך להוכיח ש

$$(g_1, g_2)^{-1}(h_1, h_2)(g_1, g_2) \in H_1 \times H_2$$

הפכולה במכפלה קרטזית של חבורות היא רכיב רכיב.
לכן מתקיים ש:

$$(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$$

הסבר:

$$(g_1, g_2)(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 g_1^{-1}, g_2 g_2^{-1}) = (e_{G_1}, e_{G_2})$$

$$(g_1, g_2)^{-1}(h_1, h_2)(g_1, g_2) = (g_1^{-1}, g_2^{-1})(h_1, h_2)(g_1, g_2) =$$

$$(g_1^{-1} h_1 g_1, g_2^{-1} h_2 g_2) \in H_1 \times H_2$$

כי H_1 וH_2 הן תתי חבורות נורמליות ולכן סגורות להצמדה.
שאלה: תהי G חבורה סופית ו$H_1, H_2 \leq G$ איזומורפיות. האם הן שוות?
תשובה: לא בהכרח. למשל $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

$$H_1 = \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$$

$$H_2 = \{0\} \times \mathbb{Z}_2$$

שאלה: כמה תתי חבורות יש ל$\mathbb{Z}_n$ שמכילות את $d\mathbb{Z}_n$.
תשובה: (זה לא בחומר לבוחן, כי זה מסתמך על משפט ההתאמה).

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$d\mathbb{Z}_n = (d\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z})$$

$d \mid n$.
תתי חבורות של $\mathbb{Z}_n$ מתאימות לתת חבורות של $\mathbb{Z}$ שמכילות את $n\mathbb{Z}$.
תתי חבורות של $\mathbb{Z}$ הן מצורה $m\mathbb{Z}$. בשביל שהן יכילו את $n\mathbb{Z}$ אז $m \mid n$.
אז אנחנו רוצים דברים מהצורה $m\mathbb{Z}$ שמכילים את $d\mathbb{Z}$. כלומר $m \mid d$.

התשובה היא מספר המחלקים של d.

תרגיל: יהי $f : G \to H$ הומומורפיזם. ונניח שA היא קבוצת יוצרים של G. האם $f[A]$ היא קבוצת יוצרים של H?

פתרון: מכיוון שאין שום דרישה על ההומומורפיזם אין סיבה שזה יעבוד. למשל, אפשר לקחת את f להיות ההעתקה הטריוויאלית שהכל הולך לe. אז $f[A] = \{e\}$, וכל עוד H היא לא החבורה הטריוויאלית היא נוצרת ע"י e.

תרגיל המשך: כנ"ל לגבי אפימורפיזם

פתרון: נכון.

הוכחה: צריך להוכיח שכל $h \in H$ שייך למה שנוצר ע"י $f[A]$.

לh יש מקור, g. A היא קבוצת יוצרים, אז g שווה לאיזשהי מילה בA ובהופכיים. כלומר,

$$g = a_1^{x_1} \cdots a_n^{x_n}$$

כאשר $x_i = \pm 1$.

$$h = f(g) = f(a_1^{x_1} \cdots a_n^{x_n}) = f(a_1)^{x_1} \cdots f(a_n)^{x_n}$$

$$h \in \langle f[A] \rangle$$

תרגיל: יהי m מספר טבעי וG חבורה נוצרת סופית. הוכיחו שלG יש מספר סופי של תת חבורות מאינדקס m.

טענת עזר: G פועלת על G/H ע"י כפל משמאל. המייצב של קוסט מהצורה xH הוא xHx^{-1}.

פתרון: נתחיל מלספור כמה תתי חבורות נורמליות יש לG מאינדקס m.

ממשפט האיזו הראשון אתם יודעים שכל תת חבורה נורמלית היא גרעין של איזשהו אפימורפיזם.

אם התת חבורה היא מאינדקס m, אז היא גרעין של אפימורפיזם מG לחבורה מגודל m.

אם H נורמלית, אז אנחנו יודעים שG/H היא חבורה. יש לנו אפימורפיזם טבעי מG לG/H שמוגדר ע"י

$$g \to gH$$

הגרעין של האפימורפיזם הזה הוא כל האיברים $g \in G$ שמקיימים ש$H = gH$. וזה שקול לכך ש$g \in H$.

כלומר, הגרעין הוא בדיוק H.

$$G/H \cong K$$

$$|K| = [G : H] = m$$

כמה חבורות יש עם m איברים (עד כדי איזומורפיזם)?

יש מספר סופי. כי זה בעצם שקול ללקחת m אברים גנריים $x_1, ..., x_m$ ולבנות להם טבלת כפל. יש מס' בופי של טבלאות אפשריות.

$$G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$$

בשביל להגדיר אפימורפיזם מG מספיק להחליט לאן נשלחים היוצרים (אי אפשר לשלוח לאן שרוצים, זה לא כמו בסיס במרחב וקטורי). אבל ברגע שקבענו לאן היוצרים הולכים זה קובע את כל ההומומורפיזם.

לכל חבורה עם m איברים, מספר האפימורפיזמים האפשריים קטן שווה ממספר ההעתקות האפשריות מ$g_1, ..., g_n$ לחבורה שזה m^n . או בקיצור, מספר סופי.

אז יש מספר סופי של אפימורפיזמים מG לכל חבורה בת m אברים. ויש מספר סופי של חבורות עם m איברים. לכן יש מספר סופי של אפימורפיזמים מG לחבורה בת m איברים. כל תת חבורה נורמלית מאינדקס m היא גרעין של אפימורפיזם כזה. לכן יש מס' סופי של תת חבורות נורמליות מאינדקס m.

זה נכון לכל m, אז באופן כללי יש מס' סופי של תת חבורות נורמליות מאינדקס סופי.

כעת, תהי H תת חבורה כלשהי. ראיתם בש"ב את התת חבורה הבאה

$$core(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

זאת תת חבורה נורמלית.

והיא מוכלת בH.

טענת עזר: אם H היא מאינדקס סופי, אז $core(H)$ היא מאינדקס סופי.

הוכחת עזר: H מאינדקס סופי, אז יש מס' סופי של קוסטים שונים. ביטויים מהצורה

$$gH$$

יש רק מספר סופי.

אם $gH = kH$ אז

$$Hg^{-1} = (gH)^{-1} = (kH)^{-1} = Hk^{-1}$$

נקח $g_1, , , g_m$ להיות נציגים של חבורת המנה.

אז כל ביטוי מהצורה

$$kHk^{-1} = g_iHg_i^{-1}$$

הסבר: יש g_i ששקול לk. כלומר, $kH = g_iH$ וראינו שזה גורר גם $Hk^{-1} = Hg_i^{-1}$ ולכן

$$kHk^{-1} = kHHk^{-1} = g_iHHg_i^{-1} = g_iHg_i^{-1}$$

כלומר, קיבלנו ש

$$core(H)$$

שווה לחיתוך סופי.

אם H היא תת חבורה אז כל הצמדה היא תת חבורה. כלומר gHg^{-1} היא תת חבורה.
בנוסף, $[G:gHg^{-1}]=[G:H]$. הוכחה: נסתכל על פוקציית ההצמדה בg מG לעצמה.

$$x \to gxg^{-1}$$

זה הומומורפיזם חח"ע ועל (אוטומורפיזם) אז הוא שומר על האינדקס

$$[gGg^{-1}:gHg^{-1}]=[G:H]$$

ו

$$gGg^{-1}=G$$

אז $core(H)$ הוא חיתוך של מספר סופי של תת חבורות מאינדקס סופי ולכן יש לו אינדקס סופי.

אז כל תת חבורה מאינדקס סופי מכילה תת חבורה נורמלית מאינדקס סופי.

יש מס' סופי של תת חבורות נורמליות מאינדקס סופי.

ממשפט ההתאמה תת חבורה שמכילה תת חבורה נורמלית מתאימה לאיזה תת חבורה של חבורת המנה (התאמה חח"ע ועל). וחבורות המנה עבור תת חבורות נורמליות מאידקס סופי הן חבורות סופיות. אז לכל אחת מהן יש מספר סופי של תת חבורות.
תרגיל:

$$D_4/\langle\sigma\rangle$$

$|D_4|=8$
$|\langle\sigma\rangle|=4$
אז החבורת מנה היא עם שני אברים ויש רק חבורה אחת עם שני אברים.
האבירם בחבורה הם קוסטים

$$\langle\sigma\rangle, \tau\langle\sigma\rangle$$

תרגיל: נגדיר אוטומורפיזם

$$f_g: G \to G$$

$$f_g(x)=g^{-1}xg$$

עבור אילו $g\in G$ האוטומורפיזם שווה לזהות?
פתרון: האוטומורפיזם שווה לזהות אם הוא שולח כל איבר לעצמו.
לכן f_g שווה לזהות אמ"ם לכל $x\in G$

$$g^{-1}xg=x$$

אמ"ם

$$xg = gx$$

שאלה: מצאו שני שיכונים (מונומורפיזמים) שונים $S_5 \to S_6$, f וg.
תשובה: $f\ :\ \sigma \ \to\ \sigma(6)$. כלומר, נפעיל את העתקה σ על $1, .., 5$, ואת 6 נשלח לעצמו.

$$(1,2)(3,5,4) \to (1,2)(3,5,4)(6)$$

שיכון נוסף, אפשר לקבל ע"י לקחת את השיכון הראשון ואז להפעיל אוטומורפיזם על S_6, למשל, הצמדה.

$$g = (1,6)f(1,6)$$

אפשר להגדיר עוד שיכונים ע"י שינוי שמות המספרים. כלומר

$$S_5$$

זה כל הפונקציות החח"ע ועל מ$5 .., 1$ לעצמו. אפשר לשנות את שמות המספרים לקבוצה כלשהי של 5 מספרים מ$6 ,... ,1$.
ואז כל תמורה בS_5 תייצג לנו באופן הזה תמורה על השמות החדשים של המספרים.
נניח

$$1 \to 2$$

$$2 \to 3$$

$$3 \to 4$$

$$4 \to 5$$

$$5 \to 6$$

$$(1,2,3,4,5) \to (2,3,4,5,6)$$

ב. הוכיחו שלכל שני שיכונים שונים $\psi, \varphi : S_5 \to S_6$,

$$\varphi(1,2,3,4,5), \psi(1,2,3,4,5)$$

הם איברים צמודים בS_6.

פתרון: ידוע ששיכון שומר על הסדר של איברים. לכן $o(\varphi(1,2,3,4,5)) = o(1,2,3,4,5) =$ 5. כנ"ל לגבי $o(\psi(1,2,3,4,5))$. אז קיבלנו שני איברים מסדר 5.

איברים מסדר 5 בS_6 הם בהכרח מחזורים מאורך 5.

משפט מההרצאה (לא בחומר לבוחן) אומר שכל שני איברים עם אותו מבנה מחזורים הם צמודים.

תרגיל: נסתכל על מטריצות אינסופיות עם מספר סופי של איברים בכל שורה ובכל עמודה.

הכפל מוגדר בצורה הרגילה.

להוכיח שזה מונואיד.

ולהראות שיש איברים הפיכים ימין ולא משמאל.

צריך להוכיח שיש איבר יחידה- המטריצה האינסופית עם אחדות על האלכסון עונה על הדרישות וברור שהיא נטרלית לכפל.

צריך הוכיח שכפל של שתי מטריצות מהמבנה הזה יהיה גם מאותו מבנה.

נסתכל על שורה מסויימת. רוצים שהחל ממקום מסויים היא תהיה שווה ל0.

$$R_i(AB) = R_i(A)B$$

ב$R_i(A)$ יש מספר סופי של איברים שונים מ0. נניח אחרי המקום הm הכל 0.

$$R_i(A)B$$

זה בעצם לחבר את הm שורות הראשונות של B. שכל אחת מהן מתאפסת החל ממקום מסויים. אז אם נקח את המקום המקסימלי, שאר השורה היא אפסים.

ההוכחה על עמודות זהה.

$$\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix}$$

המטריצה השמאלית הפיכה מימין ולא משמאל, אבל יש לה עמודת אפסים אז היא לא הפיכה משמאל.

$$\Sigma(x_i) = \sigma(x_{i+2 \mod k})$$

תמורה היא פונקציה חח"ע ועל מ$1,,,,k$ ל$1,...,k$

אז יש לנו הרכבה של שתי פונקציות

$$x_i \to x_{i+2 \mod k}$$

וזאת פונקציה חח"ע ועל.