

מבנים אלגבריים תרגול 1

8 במרץ 2021

הגדרה: תהי A קבוצה, ותהי $A \times A \rightarrow A$ פונקציה (נקראת אצלנו פעולה דו-מקומית). הזוג $(A, *)$ ייקרא:

- מאגמה אם מתקיימת סגירות: $\forall a, b \in A : a * b \in A$.
- אגודה אם בנוסף מתקיימת קיבוציות: $\forall a, b, c : (a * b) * c = a * (b * c)$.
- מונואיד אם בנוסף יש איבר יחידה: $\exists e \in A \forall a \in A : e * a = a * e = a$.
- חבורה אם בנוסף לכל איבר יש הופכי: $\forall a \in A \exists b : a * b = b * a = e$.

דוגמאות:

1. $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$.

סגירות: $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow A + B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ אכן

כיון שחיבור מטריצות נעשה איבר-איבר אז קיבוציות נובעת מקיבוציות בממשיים.

מטריצה האפס ניטרלית לחיבור

בהינתן $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ אז "הופכי לחיבור" היא המטריצה $-A$.

בסה"כ: חבורה.

2. $(\mathbb{R}^{m \times n}, *)$ המוגדרת:

$$A * B = A \cdot B^t$$

נשים לב שעבור $n \neq m$ אין סגירות ולכן לא מאגמה.

3. $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ)$, כאשר $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זה קבוצת כל הפונקציות מהטבעיים לעצמם. הפעולה היא הרכבת פונקציות.

סגירות: בהינתן $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אז מתקיים: $f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

קיבוציות: בבדידה הוכחנו קיבוציות של הרכבה: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

האם יש איבר יחידה? פונקציית הזהות (הפונקצייה $I_{\mathbb{N}}$ המוגדרת: $I_{\mathbb{N}}(n) = n$).
 לדגומא עבור $f(n) = 2n$, אז נשים לב:

$$I \circ f(n) = I(f(n)) = I(2n) = 2n$$

$$f \circ I(n) = f(I(n)) = f(n) = 2n$$

בסה"כ קיבלנו: $I \circ f = f \circ I = f$

האם יש הופכי? לא לכל פונקציה יש הופכית. ראינו שפונקציה היא הפיכה אמ"ם היא חח"ע ועל. לכן הפונקציות הבאות לא הפיכות:

$$f(n) = 2n$$

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n = 2k \\ 1 & n = 2k - 1 \end{cases}$$

נשים לב ש- f לא על ולכן לא הפיכה, g לא חח"ע ולכן לא הפיכה. הערה: שימו לב ש- f חח"ע ולא על, g על ולא חח"ע. כלומר, חח"ע ועל אינן תכונות שקולות.

תדעו: פונקציה הפיכה מימין אמ"ם היא על ומשמאל אמ"ם היא חח"ע, וכאן נקבל:

$$g \circ f = I_{\mathbb{N}}$$

בסה"כ: מונואיד.

$$(\{z \in \mathbb{C} : z^8 = 1\}, \cdot) \quad .4$$

סגירות: אם $z^8 = 1, w^8 = 1$ אז $(zw)^8 = z^8 w^8 = 1 \cdot 1 = 1$

קיבוציות: ברור.

איבר יחידה: 1

הופכי: נשים לב שבעצם מדובר על המספרים $z_k = \text{cis} \frac{2\pi k}{8}, k \in \{0, \dots, 7\}$ ומתקיים:

$$z_k \cdot z_{8-k} = \text{cis} \frac{2\pi k}{8} \cdot \text{cis} \frac{2\pi(8-k)}{8} = \text{cis} 2\pi = 1$$

בסה"כ: זו חבורה (עם שמונה איברים).

$$\cdot \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \cdot \right) \quad .5$$

סגירות: אכן מתקיים.

קיבוציות: נובעת מקיבוציות מכפלת מטריצות.

איבר יחידה? אין. נשים לב שלכל $b \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן יש אינסוף יחידות שמאליות. ולכן אין יחידה (וגם לא ימנית), כי ראיתם בהרצאה שיחידה יש רק אחת, וכן שאם יש יחידה שמאלית וימנית הן אותה אחת דו"צ.. ולכן זו אגודה.

6. $(\{0, 1\}, \rightarrow)$, פעולת גרירה לוגית.

סגירות: $a \rightarrow b \in \{0, 1\}$

קיבוציות: לא

$$(0 \rightarrow 1) \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0$$

$$0 \rightarrow (1 \rightarrow 0) = 0 \rightarrow 0 = 1$$

ולכן מאגמה.

7. $S_n = \{f : [n] \rightarrow [n] | f \text{ is invertible}\}$. קבוצת התמורות על n איברים. זו חבורה שנעסוק בה הרבה.