

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2-n}}{3^{10n+5}} \quad \text{ג.} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(x)}} \quad \text{ב.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(x)) \cdot x \cdot (\ln(1+x))^2}{(1-\cos(x))^2 \sin(e^x)} \quad \text{א.}$$

2.

א. חשבו את  $\int x^2 \ln(x^2 + x + 1) dx$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx$ , ואם כן חשבו אותו.

3. (אין קשר בין הסעיפים)

א. תהי  $f(x)$  גזירה ב  $[0, \infty)$ . הוכיחו שלכל  $0 < x$  קיימת נקודה  $0 < c < x$  עבורה

$$f(x) = f(c) + c \cdot f'(c) \quad (\text{רמז: הביטו בפונקציה } (x \cdot f(x)).$$

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה  $x = \ln(x) + 1$ , והוכיחו תשובתכם.

4. תהי  $f$  פונקציה רציפה בכל הממשיים כך ש  $f(1) = f(-1)$ .

א. הוכיחו כי קיימת נקודה  $c$  עבורה  $f(c) = f(c+1)$ .

ב. נניח בנוסף כי  $f$  גזירה בכל הממשיים, וכי הנגזרת שלה מתאפסת בדיוק פעם אחת.

הוכיחו שנקודה  $c$  המקיימת את המשוואה בסעיף א' חייבת לקיים  $-2 < c < 1$ .

5. תהי סדרה  $a_n$  כך ש  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} = \infty$  ולכל  $n$  מתקיים  $a_n^2 + a_{n+1}^2 \leq 1$ .

א. הוכיחו כי  $a_n$  מונוטונית החל ממקום מסוים.

ב. הוכיחו כי  $a_n$  מתכנסת.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה  $a_n = \frac{\frac{1}{e^n} + \frac{2}{e^n} + \dots + \frac{n}{e^n}}{n}$

ב. חשבו את  $\sqrt{2}$  עד רמת דיוק של  $h = 0.05$