מתמטיקה בדידה – תרגיל 9 - פתרונות

1.

א. תהי הקבוצה $B_k = \{n^k \mid n \in \mathbb{N}\}$, כאשר $k \in \mathbb{N}$. הוכח ש- $|B_k| = |\mathbb{N}|$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (בשאלה זו קבוצה $\mathbb{N}$ אינה מכילה את 0).

ב. הוכח שאם $|A \setminus B| = |B \setminus A|$ אז $|A| = |B|$.

פתרון:

א. צריך להוכיח שקיימת פונקציה $f : \mathbb{N} \to B_k$ חח"ע ועל. נגדיר את הפונקציה להיות $f(n) = n^k$.

חח"ע: חהיו $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ כך ש- $f(n_1) = f(n_2)$, זאת אומרת $n_1^k = n_2^k$.

$$n_1^k = n_2^k \iff n_1^k - n_2^k = 0 \iff (n_1 - n_2)\left(n_1^{k-1} + n_1^{k-2}n_2 + n_1^{k-3}n_2^2 + \ldots + n_1 n_2^{k-2} + n_2^{k-1}\right) = 0 \iff$$

$$\iff (n_1 - n_2)\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\left(n_1^{k-1-i}\cdot n_2^i\right) = 0 \iff n_1 = n_2$$

(כיוון שהסכום תמיד חיובי, ו- $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ לא ייתכן פתרון אחר).

על: יהי $b \in B_k$, זאת אומרת קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $b = n^k$ ולכן עבור $n \in \mathbb{N}$ זה מתקיים: $f(n) = b$.

ב. נתון ש- $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, זאת אומרת קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \setminus B \to B \setminus A$. נגדיר פונקציה $g : A \to B$ ע"י $g(a) = \begin{cases} f(a) & a \notin B \\ a & a \in B \end{cases}$. נוכיח ש- g חח"ע ועל.

חח"ע – יהיו $a_1, a_2 \in A$ כך ש- $g(a_1) = g(a_2)$, מכיוון שלכל $a \in A$ $f(a) \notin A$ אז או ש- $a_1, a_2 \in B$ או ש- $a_1, a_2 \notin B$ (כי אם $a_1 \in B \wedge a_2 \notin B$ נקבל $f(a_2) = a_1$ וזה לא ייתכן).

אם $a_1, a_2 \in B$ אז $a_1 = a_2$ ואם $a_1, a_2 \notin B$ אז $f(a_1) = f(a_2)$ ומכיוון ש- f חח"ע נקבל $a_1 = a_2$.

על – יהי $b \in B$. אם $b \in A$ אז $f(b) = b$, אם $b \notin A$ אז $b \in B \setminus A$ ומכיוון ש- f על קיים $a \in A \setminus B$ כך ש- $f(a) = b$. מכיוון ש- $a \notin B$ נקבל $g(a) = f(a) = b$.

2.

א. הוכח או הפרך: אם $|A| = |B|$ אז קיימת פונקציה f חח"ע מ- A ל- B שהיא לא על

ב. תהי K קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונאליים. הוכח ש- K אינה בת מניה.

ג. מצא מהי עוצמת הקבוצה: $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (x - \pi) \in \mathbb{Q}\right\}$ (למשל, $\pi, \pi + 0.189 \in A$).

פתרון:

א. לא נכון. דוגמא נגדית: נניח $A = B = \{1\}$. נקבל ש- $|A| = |B|$ אבל לא קיימת פונקציה f מ- A ל- B שהיא לא על.

ב. ידוע כי $\mathbb{Q}$ היא בת מניה. נניח בשלילה כי $K = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ בת מניה. לכן, $K \cup \mathbb{Q}$ היא בת מניה, אבל $K \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ ו- $\mathbb{R}$ אינה בת-מניה. לכן קיבלנו סתירה. K אינה בת מניה.

ג. נגדיר פונקציה $f : A \to \mathbb{Q}$, כך ש- $f(x) = x - \pi$. מהגדרת A זאת אכן פונקציה מ- A ל- $\mathbb{Q}$. נוכיח ש- f חח"ע ועל $\mathbb{Q}$.

חח"ע: יהיו $x_1, x_2 \in A$ ונניח $f(x_1) = f(x_2)$. לכן $x_1 - \pi = x_2 - \pi$. נוסיף π בשני האגפים ונקבל $x_1 = x_2$. <u>מש"ל</u>.

על: יהי $q \in \mathbb{Q}$. יהי $x = q + \pi$. אז $x \in A$ כי $x - \pi = q$, כלומר $f(x) = q$. מתאנו מקור ל- q, שהוא איבר כלשהו ב- $\mathbb{Q}$, לכן f היא על $\mathbb{Q}$. <u>מש"ל</u>.

לכן, מהגדרת שוויון עוצמות, $|A| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

3.

א. תהי A קבוצת עיגולים זרים במישור. הוכח כי $|A|\le\aleph_0$ (עיגול במישור מוגדר באופן הבא: $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \middle|\ (x-a)^2+(y-b)^2<r^2\right\}$, כאשר $a,b,r\in\mathbb{R}$ ו- $r>0$).

ב. תהי *B* קבוצת כל המעגלים זרים במישור. האם בהכרח $|B|\le\aleph_0$? (מעגל במישור מוגדר באופן הבא: $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \middle|\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\right\}$, כאשר $a,b,r\in\mathbb{R}$ ו- $r>0$).

__פתרון:__

א. כיון שהעיגולים זרים, פונקציה המתאימה לכל עיגול ב– A נקודה ב- $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ הנמצאת בתוכו היא חח"ע (כי בין כל שני מספרים ממשיים יש לפחות מספר רציונאלי אחד). מכאן $|A|\le|Q\times Q|=\aleph_0$.

ב. לא. תהי B הקבוצה $\left\{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \middle|\ x^2+y^2=r^2\right\}\ \middle|\ r\in\mathbb{R}^+\right\}$. כל המעגלים ב- B זרים. הפונקציה $f:\mathbb{R}^+\to\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \middle|\ x^2+y^2=r^2\right\}$ שמעבירה את $r\in\mathbb{R}$ לעיגול ברדיוס r היא פונקצית חח"ע ועל מ- $\mathbb{R}^+$ ל- B. לכן $|B|=\aleph$.

4. הוכיחו ש- אם $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\{0,1\}$.

__פתרון:__

נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\{0,1\}$. נגדיר פונקציה שלמעשה שומרת לכל מספר את תוצאת חלוקתו ב- 2 והשארית. לדוגמא: $f(7)=(3,1)$ וכו'.

$$f(x)=\begin{cases}(k,0), & x=2k\\ (k+1,1) & x=2k+1\end{cases}$$

נגדיר $g:\mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}$ ע"י $g(x,y)=2x-y$.

נבצע הרכבה:

$$g\circ f(x)=\begin{cases}g(k,0) & x=2k\\ g(k+1,1) & x=2k+1\end{cases}=\begin{cases}2k-0 & x=2k\\ 2k+2-1 & x=2k+1\end{cases}=x\quad\Rightarrow\quad g\circ f=I_{\mathbb{N}}$$

$$f\circ g(x,y)=f(2x-y)=\begin{cases}\left(\dfrac{2x-y}{2},0\right) & 2x-y\equiv 0(\bmod 2)\\ \left(\dfrac{2x-y-1}{2},1\right) & 2x-y\equiv 1(\bmod 2)\end{cases}=\begin{cases}(x,0) & y=0\\ (x,1) & y=1\end{cases}=(x,y)$$

$$\Rightarrow\ f\circ g=I_{\mathbb{N}\times\{0,1\}}$$

לכן f חח"ע ועל. __מש"ל__

5. הוכיחו ש- $\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

__פתרון__:

נגדיר $\Psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$, $\Psi(f,g)(n) = 2f(n) + g(n)$.

בכיוון שני נגדיר: $\Phi : \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\Phi(f) = (g,h)$ כאשר:

$$h(n) = f(n)\ (mod\ 2) = \begin{cases} 0 & f(n) = 0,2 \\ 1 & f(n) = 1,3 \end{cases}$$

$$g(n) = \left[f(n)/2 \right] = \begin{cases} 0 & f(n) = 0,1 \\ 1 & f(n) = 2,3 \end{cases}$$

(כאשר $\left[f(n)/2 \right]$ הוא חלק שלם של $f(n)/2$).

כעת:

$$(\Psi \circ \Phi(f))(n) = (\Psi(g,h))(n) = 2g(n) + h(n) = f(n) \;\Rightarrow\; \Psi \circ \Phi(f) = f \;\Rightarrow\; \Psi \circ \Phi = I_{\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}} .$$

בכיוון שני:

$$\Phi \circ \Psi(f,g) = \Phi(2f+g) = ([f + g/2], (2f+g)(\text{mod } 2)) = (f,g) .$$

__בהצלחה!__