פתרון מועד ב' בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

קורס מס' 83114 תשע"ז, סמסטר קיץ

שאלה 1.

א. קבע עבור אילו ערכי α הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ מתכנס (10 נק').

ב. חשב את סכום הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ (15 נק').

פתרון:

א. ניעזר במבחן ההשוואה הגבולי. לחישוב הגבול הבא נעבור לפונקציות:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\underbrace{=}_{y=\frac{1}{x}}\lim_{y\to0^+}\frac{\arctan y}{y}\underbrace{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{y\to0^+}\frac{1}{1+y^2}=1$$

מכאן שהטור שלנו "חבר" כאשר $x\to\infty$ של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ שמתכנס אם"ם $\alpha>1$.

ב. נשים לב כי: $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n\Big|_{x=\frac{1}{2}}$. זהו טור חזקות שמתכנס בהחלט עבור $|x|<1$

ולכן ניתן לרשום: $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n$.

נייצג את הטור הראשון כטור גיאומטרי:

$$nx^n=xnx^{n-1}=x\left(x^n\right)'\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}2nx^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)'=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=2x\cdot\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{2x}{(1-x)^2}$$

ומכאן: $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}$ ולכן: $S=\frac{1}{1/4}-1=3$.

שאלה 2.

א. פתח את הפונקציה $f(x,y)=\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ לפולינום בשני משתנים בקחרוב מסדר 2 (ללא שארית לגרנז') סביב הנקודה $(0,1)$.

ב. הצב בפולינום שקיבלת את הפרבולה $x=y^2$. האם התוצאה שקיבלת זהה לפולינום מסדר שני שמתקבל בפיתוח מקלורן של $f\left(y^2,y\right)=\sin y$? הסבר מדוע.

פתרון:

א. נחשב נגזרות חלקיות עד לסדר 2 כולל בנקודה:

$$n=0: f(0,1)=0$$

$$n=1: f_x(0,1)=\frac{1}{y}\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{(0,1)}=1\ ,\ f_y(0,1)=\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{(0,1)}=0$$

$$n=2: f_{xx}(0,1)=\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{(0,1)}=0,$$

$$f_{xy}(0,1)=\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)-\left(\frac{x}{y^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{(0,1)}=-1$$

$$f_{yy}(0,1)=\left(\frac{2x}{y^3}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x^2}{y^4}\right)\sin\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{(0,1)}=0$$

בסה"כ נקבל: $\sin\left(\frac{x}{y}\right)\approx x-x(y-1)=2x-xy$.

ב. לפי הפיתוח הקודם: $\sin(y)\approx 2y^2-y^3$ ואילו פיתוח מקלורן נותן: $\sin(y)\approx y-\frac{y^3}{3!}$. ההבדל בפיתוחים נובע מכך שהמסלול $x=y^2$ אינו עובר דרך הנקודה $(0,1)$ סביבה פיתחנו.

שאלה 3.

מצא נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות של הפונקציה: $f(x,y)=x^3+y^3$ מעל ההיפרבולה: $x^2-y^2=1$.

פתרון:

לגבי נקודות קיצון מוחלטות: זה ברור שאין, שכן אפשר לקחת x גדול כרצוננו, כך שה-y המתאים לו גם יהיה חיובי, ולכן אין מקסימום מוחלט, ובאותו אופן ניתן לראות כי גם אין מינימום מוחלט. אין זה מפתיע שכן התחום (האילוץ) אינו קומפקטי. למציאת נקודות הקיצון המקומיות נחפש נקודות קריטיות של פונקצית לגרנז': $L=x^3+y^3+\lambda\left(x^2-y^2-1\right)$:

מתוך: $\begin{cases} L_x=3x^2+2\lambda x=0 \\ L_y=3y^2-2\lambda y=0 \\ L_\lambda=x^2-y^2-1=0 \end{cases}$ נקבל את הנקודות: $(\pm1,0)$ (x לא יכול להתאפס באילוץ). אם $y\neq 0$

אז מתוך שתי המשוואות הראשונות מתקבל: $y=-x$ וזה לא יתכן על האילוץ.

כיוון שהשפה חלקה וסגורה (אין לה קצוות) אלו הן כל הנקודות החשודות לקיצון מקומי. נבדוק זאת ע"י ההסיאן שם: $HL=\begin{pmatrix} 6x+2\lambda & 0 \\ 0 & 6y-2\lambda \end{pmatrix}$. בנקודה $(1,0)$ מתקבל $\lambda=-\frac{3}{2}$ ואז התבנית חיובית לחלוטין והנקודה היא מינימום מקומי, ובפרט על האילוץ. בנקודה $(-1,0)$ מתקבל $\lambda=\frac{3}{2}$ ואז התבנית היא שלילית לחלוטין, ובפרט על האילוץ, כלומר זו נקודת מקסימום מקומי.

שאלה 4. חשבו $\iint_D xy\left(x^2+y^2\right)dxdy$ כאשר D הוא התחום ברביע הראשון של $\mathbb{R}^2$ שחסום ע"י ההיפרבולות $xy=1,\ \ xy=4,\ \ x^2-y^2=1, x^2-y^2=4$.

פתרון:

ניעזר בהחלפת משתנים: $u=xy,\ v=x^2-y^2$ עם יעקוביאן:

$$J^{-1}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix}=\left|-2\left(x^2+y^2\right)\right| \Rightarrow J=\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}.$$

ונתאר את התחום החדש ע"י: $D^*=\begin{Bmatrix} 1\le u\le 4 \\ 1\le v\le 4 \end{Bmatrix}$. בסה"כ נקבל:

$$\iint_D xy\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{1}{2}\iint_{D^*} uv\,dudv=\frac{1}{2}\int_1^4 udu\int_1^4 dv=\frac{3}{2}\cdot\frac{u^2}{2}\bigg|_1^4=\frac{45}{4}.$$

שאלה 5.

א. תהא פונקציה סקלרית $F\left(x,y,z\right)\in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$. הראה כי: $rot\left(\nabla F\right)=\overline{0}$. מה משמעות התוצאה שקיבלת ?

ב. תהא γ המסילה הסגורה ברביע הראשון של $\mathbb{R}^2$ המורכבת משתי הפרבולות: $y=x^2$ ו- $x=y^2$ נגד כיוון השעון. חשב $\int_\gamma F\bullet dr$ באשר: $F=\left(x^3-y,x+\sin y\right)$.

פתרון:

א. נחשב: $rot\left(\nabla F\right)=\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}=\left(F_{zy}-F_{yz},F_{zx}-F_{xz},F_{yx}-F_{xy}\right)$. נתון ש F בעלת נ"ח מסדר שני רציפות, לכן עפ"י משפט שוורץ הנ"ח המעורבות לא תלויות בסדר הגזירה ומכאן שהתוצאה היא וקטור האפס. המשמעות היא שאם נתייחס אל F כאל פונקצית פטונציאל (המוגדרת בכל המרחב) של שדה ∇F , אז השדה הזה הוא משמר, לכן אין לא נטייה להסתובב.

ב. נסמן ב- D את התחום החסום ע"י הפרבולות ואז נקבל עפ"י משפט גרין:

$$\oint_L F\bullet dr=\iint_D\left(Q_x-P_y\right)dxdy=2\iint_D dxdy=2\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=2\left[\frac{2x^{3/2}-x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$