

## תרגיל מספר 1 בהסתברות ותהליכים סטוכסטיים, תשע"ד

ניתן להגיש עד לתחילת השעור ביום שני ה 8.12.2014 . ניתן ועדיף להגיש במחשב בפורמט וורד או PDF.

1. יהיה  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  מרחב הסתברות. ו  $X, Y$  שני משתנים מקריים. הוכיחו שהקבוצה  $A = \{w \in \Omega : X(w) = Y(w)\}$  (כלומר  $A \in \mathcal{F}$ ).
2. הראו כיצד ניתן לצמד 3 קוביות כך שקובייה א תנצח את ב רוב הזמן, ב את ג רוב הזמן ו ג את א רוב הזמן.  
כלומר הגדירו התפלגות משותפת על שלשת משתנים  $(X, Y, Z)$  כך שההתפלגות השולית של כל אחד מהמשתנים היא אחידה על המספרים 1,2,3,4,5,6 ומתקיים  $P(X > Y) > 1/2, P(Y > Z) > 1/2, P(Z > X) > 1/2$   
נסו לחשוב עד כמה אופטימלית הבנייה שלכם.
3. א. מצאו חסם עליון הדוק על  $P(X > Y)$  כאשר נתון ש  $X \sim \text{Ber}(1/3)$  ו  $Y \sim \text{Ber}(2/3)$  (אבל או ילא בהכרח ב"ת)  
ב. מצאו צימוד  $(X, Y)$  בין התפלגות  $\text{Bin}(2, 1/2)$  ל  $\text{Bin}(3, 1/2)$  שממקסם את הסיכוי ש  $X = Y$ .
4. תנו 2 דוגמאות שלא נתנו בשעור למאורעות זנב על סדרה של הטלות מטבע ב"ת (כלומר כאשר הסיגמה אלגבראות הן  $F_n = \sigma(A_n)$  כאשר  $A_n$  המאורע שיצא 1 בהטלה ה n.)
5. הראינו בשעור שאם לוקחים את הגרף  $G$  להיות שני עותקים של  $Z^2$  ומחברים אותם על ידי קשת בודדת (בניח בין ראשית הצירים של שני העותקים) אז אין חוק 0-1 על מספר הרכיבים האינסופיים בפרקולציה על  $G$ .  
א. נתון ש  $P_c(Z^2) = \frac{1}{2}$  מהו  $P_c(G)$ ?  
ב. האם הסיכוי לקיומם של שני רכיבי קשירות מונוטוני עולה או יורד מעל  $P_c$ ?
6. הראו ש  $P_c(Z^2) < P_c(Z^4)$ . (אי שוויון חלש נובע ממונוטוניות. הדבר נכון גם למימד 3 ואיפלו "פחות" אבל במימד 4 צריך פחות להתאמץ)