תרגיל 3 - אי שיוויונים אי תלות ומשפטי גבול - תשע"ט

25 באפריל 2019

1. (שאלת חימום) חבר קרוב שלך התראיין בשבוע שעבר ב־4 מקומות עבודה. לדבריו, הוא יקבל הצעת עבודה מכל אחד מהחברות בו הוא התראיין בסיכוי של 20%. למרות זאת, מכיוון שהוא התראיין ל־ 4 חברות שונות, כך לטענתו, הוא בטוח ב־ 90% שהוא יקבל לפחות הצעת עבודה אחת. האם הוא צודק?

2. נתון המשתנה המקרי $X \sim Exponential(\lambda)$. הוכח:

   (א) $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{\lambda a}$

   (ב) הראו $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq b) \leq \frac{1}{\lambda^2 b^2}$ והכיחו $\mathbb{P}(X \in (\frac{1}{\lambda} - b, \frac{1}{\lambda} + b)) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2 b^2}$.

3. יהיו X ו־ Y משתנים מקריי המקיימים

$$\mathbb{E}(X) = 1, Var(X) = 4, \mathbb{E}(Y) = 2, Var(Y) = 1$$

   אם $\mathbb{E}(XY) \in \mathbb{N}$ מצא את הערך המקסימלי האפשרי של $\mathbb{E}(XY)$ (רמז: השתמו במקדם המתאם של פירסון ובאישיוויון קושי שוורץ $|\mathbb{E}(XY)|^2 \leq |\mathbb{E}(X^2)| \cdot |\mathbb{E}(Y^2)|$ ובתנאים הנדרשים הנגזרים מהם).

4. מטרת התרגיל הבא הוא להוכיח את משפט הגבול המרכזי CLT באמצעות שימוש בפונקציה יוצרת מומנטים (ניתן באופן דומה להוכיח באמצעות הפונקציה האופיינית).

   (א) יהיו $X_1, ..., X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים זהה כך ש־ $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ ו־ $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. ופונקציה יוצרת מומנטים $M_X(s) < \infty$ הסופית בקטע $[-c, c]$ עבור $c > 0$ קבוע.

(ב) נגדיר

$$Z_n = \frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

אם נתון (מוזמנים להוכיח) כי לכל משתנה מקרי Y עם פונקציה יוצרת מומנטים מוגדרת היטב ו־

$$\mathbb{E}(Y) = 0$$

$$Var(Y) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} [M_Y(\frac{s}{\sqrt{n}})]^n = e^{\frac{s^2}{2}}$$

הוכח:

$$\forall_{s\in[-c,c]} \lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(s) = e^{\frac{s^2}{2}}$$

5. יהיו $x, y \in (0,1]$ ו־ $A \subseteq (0,1]$ נגדיר את הפעולה (חיבור מודולו 1):

$$x \oplus y = \begin{cases} x+y & x+y \in (0,1] \\ x+y-1 & else \end{cases}$$

וכן,

$$A \oplus x = \{a \oplus x \,|\, a \in A\}$$

נגדיר

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B}((0,1]) \,|\, A \oplus x \in \mathcal{B}((0,1])\, and \forall_{x\in(0,1]} \mathbb{G}(A \oplus x) = \mathbb{G}(A)\}$$

כאשר $\mathbb{G}$ היא מידת לבג על $(0,1]$. הוכח: $\mathcal{L}$ מהווה מערכת λ.