תרגיל בית 3 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות קלות יותר בדרך כלל, אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

1. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה ואם לא מצא דוגמא נגדית:
   (א) כל חבורה צקלית היא אבלית.
   (ב) כל חבורה אבלית היא צקלית.
   (ג) אם $o(a) = n$, אז $a^{-1} = a^{n-1}$.
2. כתבו את לוחות הכפל של U_5, U_8. האם מדובר באותה חבורה (עד כדי שינוי שמות)?

שאלות רגילות

1. יהי F שדה. קבעו (והוכיחו את קביעתכם) האם תת־הקבוצות הבאות הן תת־חבורות של החבורות הנתונות או לא:
   (א) $O_n(F) = \left\{A \in GL_n(F) | A^T = A^{-1}\right\} \subseteq GL_n(F)$ המטריצות האורתוגונליות ביחס לכפל מטריצות.
   (ב) $\{A \in M_n(F) | \det A = 0\} \subseteq M_n(F)$ ביחס לחיבור מטריצות.
2. תהי G חבורה ו־H, K תת־חבורות שלה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   (א) $H \cap K$ היא תת־חבורה.
   (ב) $H \cup K$ היא תת־חבורה.
   (ג) $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$ היא תת־חבורה.
   (ד) אם G אבלית אז HK היא תת־חבורה.
   (ה) $\Delta_H = \{(h, h) | h \in H\}$ היא תת־חבורה של $G \times G$.
3. תהי G חבורה, ותהי $\varnothing \neq H \subseteq G$ תת־קבוצה לא ריקה.
   (א) הוכיחו שאם G חבורה סופית, אז כדי להוכיח ש־H היא תת־חבורה של G מספיק לבדוק סגירות לפעולה.
   (ב) הפריכו את הסעיף הקודם כאשר G אינסופית.
4. תהי G חבורה ויהיו $a, b \in G$ איברים.
   (א) הוכיחו כי $o(ab) = o(ba)$.
   (ב) הוכיחו כי $o(a) = o(a^{-1})$

זהירות: לא הנחנו שהחבורה אבלית או שהסדרים סופיים.

5. פתרו את המשוואות הבאות. כלומר מצאו כל $x \in \mathbb{Z}$ המקיים אותן, ולא רק אחד.

(א) $33x \equiv 1 \pmod{218}$

(ב) $-7x + 3 \equiv 9 \pmod{30}$

שאלות אתגר

אם פתרתם את שאלות האתגר, ואין לשאלה פתרון, בבקשה שלחו לי את הפתרון שלהן.

1. הזכרו בהגדרת פונקציית אוילר

$$\varphi(n) = |\{a | 0 \leq a < n,\ (a,n) = 1\}|$$

הוכיחו כי $(n,m) = 1$ אם ורק אם $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

רמז: משפט השאריות הסיני.

1. תהי G חבורה סופית. הוכיחו כי מספר האיברים מסדר 3 הוא זוגי (אולי אפס).

מה לגבי מספר האיברים מסדר p כאשר p מספר ראשוני אי זוגי?

2. מצאו חבורה אינסופית שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים בה איבר מסדר n. האם אתם יכולים גם להבטיח שהסדר של כל האיברים הוא סופי?

כמו כן, לכל $m > 1$ מצאו חבורה אינסופית G_m שהסדר של כל איבר בה הוא לכל היותר m.

האם אתם יכולים למצוא דוגמאות לשאלות האלו כך שהחבורות הן מעוצמה $\aleph_0$?

בהצלחה!