תרגיל בית 3 תורת גלואה - תשע"ח

1. תהי $^K/_F$ הרחבת שדות ממימד p, כאשר p מספר ראשוני. הוכיחו כי אין שדות ביניים, כלומר שאין שדה $F \subsetneq L \subsetneq K$.

2. יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום אי־פריק מדרגה n, ו־$^K/_F$ הרחבה ממימד m. הראו שאם n, m הם זרים אז $f(x)$ הוא אי־פריק גם מעל E.

3. תהי הרחבה $^K/_F$ ואיברים $a, b \in K$ כך שמימדי ההרחבות $[F[a]\colon F]$, $[F[b]\colon F]$ הם זרים. הוכיחו כי

$$[F[a,b]\colon F] = [F[a]\colon F] \cdot [F[b]\colon F]$$

.

4. מצאו את הפולינום המינימלי של האיברים הבאים מעל השדה המצויין:

   א. $i + \sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}$.

   ב. $\sqrt[5]{7}$ מעל $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{7}\right]$.

5. מצאו את שדות הפיצול של הפולינומים הבאים , וחשבו את המימד שלהם מעל $\mathbb{Q}$:

   א. $x^5 - 2$

   ב. $x^p - 2$ כאשר p מספר ראשוני.

   ג. $x^6 - x^3 - 2$

ד. $(x^2+1)(x^3-1)$

6. יהי פולינום $f(x) \in F[x]$. ויהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כל שורשי הפולינום.
הוכיחו כי שדה הפיצול של $f(x)$ מעל F הוא $F[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$.
(רמז: הראו שמכפלת של השורשים היא איבר בF).