לנארית2-שעור חזרה

חלק א:

(2) הוכח את המשפט הבא מבלי להשתמש ב- $AB=I \Rightarrow BA=I$ ($A=B^{-1}, B=A^{-1}$)

יהיו $A,B\in M_n(F)$ כך ש- $AB=I$.

$T: M_n(F)\to M_n(F)$

$T(X)=BX \quad \forall X\in M_n(F)$

א. הוכח T איזומ'

ב. הסבר בעזרת א' מדוע B הפיכה.

פתרון:

א. ליניאריות T.

$\forall X_1, X_2\in M_n(F), \alpha\in F \quad T(X_1+\alpha X_2)=B(X_1+\alpha X_2)=$

$BX_1+\alpha BX_2 = T(X_1)+\alpha T(X_2) \Rightarrow$ ל״ה

$X\in \ker T \Rightarrow T(X)=BX=0 \;/\cdot A \qquad \Rightarrow \ker(T)=\{0\}$

$ABX = X = A\cdot 0 = 0$

$\Rightarrow T$ חח״ע $\underset{\text{dim שווה}}{\Rightarrow}$ T על $\Rightarrow$ איזומ'

ב. T איזומ' $\Leftarrow$ T הפיכה $\Leftarrow$ $\forall \underset{\neq 0}{X}\in M_n(F)\ \exists \underset{\neq 0}{Y}\in M_n(F):$

$T^{-1}(X)=Y$

בפרט $\Rightarrow \exists \underset{\neq 0}{Y}: T^{-1}(I)=Y \Rightarrow \exists Y: I=T(Y)=BY$

$\Leftarrow Y=B^{-1} \Leftarrow B$ הפיכה!

(3) $V=(\mathbb{Z}_2)^3$, נגדיר $T:V\to V$ ע"י

$$T(x,y,z)=(x^2+y^2,\ y^2+z^2,\ x^2+z^2)$$

א. הוכח T ל"ה

ב. מצא בסיס B_1 ל-Ker ו-B_2 ל-Im

ג. מצא את מימדי Ker ו-Im

ד. הוכח $B=B_1\cup B_2$ בסיס ל-V

ה. חשב $[T]_B^B$ והראה ש-T ... ל-V.

<u>פתרון</u>

א.
$$T(v_1+\alpha v_2)=T(x_1+\alpha x_2,\ y_1+\alpha y_2,\ z_1+\alpha z_2)=\begin{pmatrix}x_1^2+2\alpha x_1x_2+\alpha^2x_2^2,\ \dots\\ y_1^2+2\alpha y_1y_2+\alpha^2y_2^2,\ \dots,\ \dots\end{pmatrix}$$
$$=(x_1^2+y_1^2,\dots,\dots)+\alpha(x_2^2+y_2^2,\dots,\dots)=T(x_1,y_1,z_1)+\alpha T(x_2,y_2,z_2)$$

$\forall \alpha\in\mathbb{Z}_2$
$\alpha^2=\alpha$
$\alpha=-\alpha$

ב.
$$T(x,y,z)=0$$
$$x=x^2=-y^2=z^2=-x^2=-x$$
$x=y=z=0$ $\quad$ $x=y=z=1$
$$\Rightarrow \operatorname{Ker}(T)=\{(a,a,a):a\in\mathbb{Z}_2\}\Rightarrow B_1=\{(1,1,1)\}$$

$(u,v,w)\in\mathbb{Z}_2^3:\ u=x^2+y^2,\ v=y^2+z^2,\ w=x^2+z^2;\ (x,y,z)\in\mathbb{Z}_2^3$

~~$u=x^2+y^2,\ v=u-x^2+z^2,\ w=v-u+2x^2$~~

$u=x+y \quad v=y+z \quad w=x+z$
$v=u-x+z$
$=u+x+z$
$=u+w$

$$\operatorname{Im}(T)=\{(u,\ u+w,\ w):u,w\in\mathbb{Z}_2\}\Rightarrow B_2=\{(1,1,0),(0,1,1)\}$$

ג. $|\operatorname{Ker}(T)|=2$
$|\operatorname{Im}(T)|=4$

$B=\{\overset{v_1}{(1,1,0)},\overset{v_2}{(0,1,1)},\overset{v_3}{(1,1,1)}\}\subseteq\mathbb{Z}_2^3$?

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \text{בת"ל}$$

3 וקטורים $\Leftarrow$ בסיס.

$T(e_1) = 2v_3 - v_1 - v_2$

$T(e_2) = v_1 \qquad\qquad \Rightarrow [T]_B^S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T(e_3) = v_2$

6) תהי $T:\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2$ לינ' כך ש-

$T(1+x) = T(x+x^2) = 0$

מי מהבאים נכון ~~[illegible]~~ : נמק.

א) $T=0$

ב) $\dim(\ker(T)) \geq 2$

ג) $T(x^2+1) \neq 0$

ד) T אפיני.

פתרון:

א - לא נכון, כי $1+x, x+x^2$ לא מהווה בסיס ל-$\mathbb{R}_2[x]$

כי ניתן להוסיף את 1 לבסיס $\{1, 1+x, x+x^2\}$

$\Leftarrow$ $\{1+x, x+x^2\}$ בת"ל קבוצה ב-$\ker(T)$ $\Leftarrow \dim(\ker(T)) \geq 2$.

נכון.

ג. $x^2+1 = \alpha(1+x) + \beta(x+x^2) =$

$\alpha + (\alpha+\beta)x + \beta x^2 \Rightarrow \alpha = 1$
$\Rightarrow \beta = -1 \wedge \beta = 1$

סתירה! $\Leftarrow$ לא ניתן לקבוע.

ד. לא בהכרח, אם $T(1)=0$ אז לא.

9 נגדיר $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ ע"י: $T(x,y,z,t)=(0,x,y,y+z)$

א. הוכח T ה"ל

ב. חשב את ~~מ~~ מייצגת $T, T^2, T^3, T^4 \dots$ (בסיס סט')

ג. חשב $\dim(\ker(T)), \dim(\mathrm{Im}(T))$

<u>פתרון</u>

א.

$T(v_1+\alpha v_2)=(0,\ x_1+\alpha x_2,\ y_1+\alpha y_2,\ y_1+\alpha y_2+z_1+\alpha z_2)=$

$(0,x_1,y_1,y_1+z_1)+\alpha(x_2,y_2,y_2+z_2)=T(v_1)+\alpha T(v_2)$

ב. $T(e_1)=(0,1,0,0)\quad T(e_2)=(0,0,1,1),\ T(e_3)=(0,0,0,1),\ T(e_4)=\vec{0}$

$$[T]_S=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{rank}(T)=3$$

$$[T^2]_S=[T]_S^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},\quad [T^3]_S=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\0&\cdots&0\\0&\cdots&0\\0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

ג. $\dim(\mathrm{Im}(T))=\mathrm{Rank}(T)=3$

$$T(x,y,z,t)=0\Rightarrow \begin{matrix}x=0\\y=0\\z=0\end{matrix}\Rightarrow \dim(\ker(T))=1$$

10 יהי $T:V\to V$ ה"ל כך ש- $T^2=T$.

הוכח $V=\ker(T)\oplus\mathrm{Im}(T)$

כלומר, יש להוכיח:

א. $Ker\,T \cap Im\,T = \emptyset$

ב. $\forall v \in V \quad v = u + w : u \in Ker\,T \wedge w \in Im\,T$

<u>פתרון:</u>

א

$$v \in Ker\,T \cap Im\,T \Rightarrow$$

$$\exists u \in V : T(u) = v \wedge T(v) = 0$$

$$\Rightarrow T^2(u) = T(v) = 0$$

$$\Rightarrow Ker(T^2) \ni u \Rightarrow u \in Ker(T)$$

$$\Rightarrow T(u) = 0 \Rightarrow v = 0$$

ב

$$\forall v \in V \quad v = \underset{Im\,T}{\underset{\cap}{T(v)}} + [v - T(v)]$$

נוכיח ש $[v - T(v)] \in Ker\,T$

$$T(v - T(v)) = T(v) - T^2(v) = 0$$

מש"ל

חלק ב':

① האם המט' הבאה לכסינה? $\mathbb{C}^{n\times n}$

אם כן, מי האלכסונית הדומה לה?

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n-1=0 \Rightarrow \lambda^n=1 \Rightarrow$$ n שורשי היחידה $\Rightarrow$

השונים רבוי' כל שורש היא $1 \Rightarrow 1 = $ ר"א $\leq$ ר"ג ≤ 1

$\Rightarrow$ ר"א = ר"ג $\Rightarrow$ לכסינה.

דומה ל: $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$: $\lambda_k = cis\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)$

$\sigma(i)=i$

$\sigma(i)=i+1$

④ הוכח כי המט' המשולשות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3: ע"ע - 3 ר"א 1, 0- ר"א 2

$(B-3I)v=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} v_3=0 \\ v_2=0 \end{matrix} \Rightarrow V_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ר"א = ר"ג

$(B-0I)v=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} v_1=0 \\ v_2=t \\ v_3=s \end{matrix} \Rightarrow V_{01}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ V_{02}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ר"א = ר"ג

$\Rightarrow$ לכסינה ודומה למטריצה.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left((\lambda-1)^2-1\right) + \left((1-\lambda)-1\right)$$

$$- (1+\lambda-1) =$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda) + (-\lambda) - \lambda = \lambda^3 - 3\lambda^2 \cancel{+2\lambda} =$$

$$\lambda^2(\lambda-3) \Rightarrow \begin{array}{ll} \lambda=0 & 2 = \text{ר"א} \\ \lambda=3 & 1 = \text{ר"ג} = \text{ר"א} \end{array}$$

$$(A - 0I)v = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} v_2 = t \\ v_3 = s \\ v_1 = -t-s \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} v_{01} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_{02} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow$$

לכסון [illegible] וקיימת לכסינה [illegible] <= קיימת

8) יהיו $A,B,C \in F^{n\times n}$ כך ש- $B=A+A^t$, $C=A-A^t$

האם B, C סימטריות / אנטיסימטריות?

נגדיר $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$

$\Leftarrow$ $b_{ij}=a_{ij}+a_{ji}$ $\forall i,j$

$b_{ji}=a_{ji}+a_{ij}$

$\Leftarrow$ $b_{ij}=b_{ji}$ $\forall i,j$

$\Leftarrow$ $\boxed{B \text{ סימטרית}}$

$c_{ij}=a_{ij}-a_{ji}$ $\forall i,j$

$c_{ji}=a_{ji}-a_{ij}=-(a_{ij}-a_{ji})$

$\Leftarrow$ $c_{ij}=-c_{ji}$ $\forall i,j$

$\Leftarrow$ $\boxed{C \text{ אנטיסימטרית}}$

12) $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. מי מהבאים נכון?

א. $|AB|=|A^2B| \Rightarrow |A|=1$

ב. $|AB|\neq 0 \Rightarrow A,B$ הפיכות

ג. $|AB|>0 \Rightarrow |A^2B|>0$

ד. אף אחת

<u>פתרון:</u>

א) $|A||B| = |AB| = |A^2B| = |A|^2|B|$

לא בהכרח. השוויון נכון גם אם $|A|=0$

ב) $|A|,|B| \neq 0 \Leftarrow |A||B| = |AB| \neq 0$

$\boxed{A,B \text{ הפיכות}} \Leftarrow$

ג) $|A||B| > 0$

$|A|^2|B| \overset{?}{>} 0$ לא בהכרח.

<u>דוגמה:</u> $|A|=|B|=-1 \Rightarrow |AB|=1>0$

$|A^2B|=-1<0$

חלק ג':

6) יהי $A\in M_8(\mathbb{C})$ מט' שהפ"א שלה הוא $(t-1)^4(t-2)^4$ והפ"מ שלה הוא $(t-1)^2(t-2)$.

נתון כי ר"ג של 1 הוא: 2.

מהי צורת ז'ורדן של A?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 2 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

7) $a\in\mathbb{R}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 4a \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

עבור אילו ערכי a ניתנת B ללכסון מעל $\mathbb{C}$ ומעל $\mathbb{R}$?

$$f_B(x)=\begin{vmatrix} x-6 & -4a \\ -9 & x+6 \end{vmatrix}=(x-6)(x+6)-36a=$$

$$x^2-36-36a=x^2-36(a+1)=(x-6\sqrt{a+1})(x+6\sqrt{a+1})$$

הנ"ל האפשרי היחיד.

$\Leftarrow$ מעל $\mathbb{C}$: לכל a.

מעל $\mathbb{R}$: $a:\ a+1\geq 0$

$\Rightarrow a:\ a\geq -1$

8) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z)=(x+z,\ x+y+z,\ x-y+z)$$

מי מהבאים נכון?

א) f_T אינו מפ"ל מעל $\mathbb{R}$

ב) T הפיכה

ג) ל-T הצגה ע"י מט' אלכסונית.

ד) T פשוטה.

<u>פתרון:</u>

$T(e_1) = (1,1,1), \quad T(e_2) = (0,1,-1), \quad T(e_3) = (1,1,1)$

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{T \text{ לא הפיכה}}$$

$$f_T(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)\left[(x-1)^2+1\right] - \left[-1+x-1\right] =$$

$$(x-1)(x^2-2x+2)-(x-2) =$$

$$x^3-2x^2+2x-x^2+2x-\cancel{2}-x+\cancel{2} =$$

$$x^3-3x^2+3x = x(x^2-3x+3) \Rightarrow \boxed{\text{לא מפ"ל מעל } \mathbb{R}}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{לא לכסינה}}$

$\boxed{\text{ולא פשוטה}}$

(12) $P, A \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש- $P^{-1}AP = A^2$.

אי מהמשפטים נכון/לא נכון? נמק

(א) λ ע"ע של A $\Leftarrow$ $|\lambda| = 1$

~~(ב) $A^n \neq 0$ לכל n טבעי~~

(ג) $A \sim A^4$

פתרון:

(ג) $A^2 = P^{-1}AP$

$$\Downarrow$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P$$

$$\Rightarrow A^4 \sim A^2 \sim A \Rightarrow \boxed{A^4 \sim A}$$

(א) לא נכון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = I^{-1}AI$$

אבל ע"ע של A הם $0, 1$.

דוגמא: $\forall A: A = A^2$

(14) T ה"ל עם פ"א: $f_T(x)=x^2(x+1)^4(x-2)$

א. מהן צורות ז'ורדן האפשריות ל-T?

ב. כיצד תשובתך תשתנה אם ידוע:

$M_T(x)=x(x+1)^2(x-2)$

<u>פתרון:</u>

א) <u>בלוקים של -1:</u>

$$J_{-1}(T)=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \text{ או }$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$$

<u>בלוקים של 0:</u>

$$J_0(T)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

<u>בלוקים של 2:</u>

$$J_2(T)=2$$

ולכן: $5\times 2\times 1=10$ אפשרויות

ב) $|J_{-1}(T)|=2,\ |J_0(T)|=1,\ |J_2(T)|=1$

לכן 2 אפשרויות.

חלק ד':

(3) ג. הגדר אופרטור אוניטרי

ב. הוכח כי הערך המוחלט של כל ע"ע של אופ' אוניטרי הוא 1

ג. A מט' אוניטרית כך ש- $(A-I)^7=0$ מצא A^{2010}

פתרון:

א. T אוניטרי אם $TT^*=I$ (או $T^*=T^{-1}$)

ב. יהי c ע"ע של T עם ו"ע v ⇐ $Av=cv$ ⇐

$$\langle Av, Av\rangle = \langle v, A^*Av\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2$$

$$\langle cv, cv\rangle = c\cdot\bar{c}\langle v, v\rangle = |c|^2\|v\|^2 \overset{v\neq 0}{\Longrightarrow} |c|^2=1 \Rightarrow |c|=1$$

ג. A ~~הרמיטית~~ אוניטרית ⇔ A נורמלית ⇐ A-I נורמלית ⇐ A-I לכסינה

⇐ A-I דומה למט' אלכסונית עם הע"ע באלכסון.

$(A-I)^7=0$ ⇐ A-I נילפ' ⇐ 0 ע"ע יחיד של A-I ⇐ 1 ע"ע יחיד של A.

A נורמלית ⇐ A לכסינה ⇐ A דומה למט' אלכסונית D עם הע"ע (כלומר 1 באלכסון):

$$A=PDP^{-1}$$

$$\boxed{A^{2010}=PD^{2010}P^{-1}=PI^{2010}P^{-1}=I}$$

(2) הוכח/הפרך: T הינה נמ"פ מעל $\mathbb{C}$. T אוניטרי וגם צמוד לעצמו (הרמיטי) ⇐ $T^3=T$.

הוכחה:

T אוניטרי ⇐ $TT^*=I$

T צמ"ע ⇐ $T=T^*$

$$T^3=TTT=TT^*T=IT=T$$ מש"ל

4) א. הגדר אופרטור נורמלי

ב. הוכח כי אם T אופרטור נורמלי ו-α,β מרוכבים כך ש- $|\alpha|=|\beta|=1$ אז גם $\alpha T+\beta T^*$ נורמלי.

פתרון:

א. $T: \; TT^* = T^*T$

ב. $(\alpha T+\beta T^*)^* = \bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} T$

$\rightarrow (\alpha T+\beta T^*)(\bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} T) = \cancel{|\alpha|^2}\, \underline{TT^*} + \alpha\bar{\beta} T^2 +$
$\beta\bar{\alpha}(T^*)^2 + \cancel{|\beta|^2}\, T^*T$

$\rightarrow (\bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} T)(\alpha T+\beta T^*) = \cancel{|\alpha|^2}\, \underline{T^*T} +$
$\bar{\alpha}\beta(T^*)^2 + \bar{\beta}\alpha(T)^2 + \cancel{|\beta|^2}\, TT^*$

והם שווים.

6) הוכח/הפרך:

V מ"פ מעל $\mathbb{C}$ $u,v\in V$ כך ש- $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$ אזי

u,v מאונכים.

שים לב כי: $\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle=\langle u,u\rangle+\langle v,v\rangle$

$\Rightarrow \langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle=\langle u,v\rangle+\overline{\langle u,v\rangle}=0$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\langle u,v\rangle=0 \Rightarrow$ הפרכה

$v=(i,0)\ ,\ u=(1,0) \Rightarrow \langle u,v\rangle=(1,0)\begin{pmatrix}\bar{i}\\0\end{pmatrix}=(-i) \Rightarrow \mathrm{Re}=0$ קיבלנו

אמור להיות סוף. נדייק

$\|u+v\|^2=(1+i,0)\begin{pmatrix}\overline{1+i}\\0\end{pmatrix}=2$

$(1+i)(1-i)=1^2-(i)^2=2$

$\|u\|^2=(1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1$ $\quad \|v\|^2=(i,0)\begin{pmatrix}-i\\0\end{pmatrix}=1$

$\Rightarrow \|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$

$\langle u,v\rangle \overset{\text{אבל}}{\neq} 0$

(8) מי מהבאים נכון? (רק אחד)

T_1,T_2 ה"ל צל"ע על אותו ממ"פ מעל C, אזי:

א. $T_1T_2+T_2T_1, i(T_1T_2-T_2T_1)$ הרימטיים.

ב. $T_1T_2{T_1}^2, T_1{T_2}^2$ הרימטיים.

ג. אף תשובה.

ד. T_1T_2, T_1+T_2 הרימטיים.

פתרון: $T_1 = T_1^*, \; T_2 = T_2^*$

ג $\cancel{(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* = T_2 T_1}$

ה $\cancel{(T_1 T_2^2)^* = (T_2^*)^2 T_1^* = T_2^2 T_1}$

ו $(T_1T_2 + T_2T_1)^* = T_2^* T_1^* + T_1^* T_2^* = T_1T_2 + T_2T_1$ ✓

$$\left(i(T_1T_2 - T_2T_1)\right)^* = -i\left(T_2^* T_1^* - T_1^* T_2^*\right) =$$

$$i\left(T_1T_2 - T_2T_1\right)$$ ✓

$A \in M_n(\mathbb{R})$ (10)

$B = I + A + A^2$

מי מהבאים נכון? (רק אחד)

1) A אורתוג' $\Leftarrow$ B אורתוג'

2) A לכסינה $\Leftarrow$ B לכסינה

3) A הפיכה $\Leftarrow$ B הפיכה

---

1) $AA^t = I$ אז $A^{-1} = A^t$

$B^t = I + A^{-1} + A^{-2}$ $\quad B^{-1} =$

3) $\exists A^{-1}$

$B = I + A + A^2 \ / \cdot A^{-1}$

$BA^{-1} = A^{-1} + I + A$

$B - A - A^2 = B - A(A+I) = I$

2) $A = PDP^{-1}$

$B = PP^{-1} + PDP^{-1} + PD^2P^{-1} = P(I+D+D^2)P^{-1}$

(14) $\langle\,,\,\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle=ax_1y_1+(2a+b)x_1y_2+(2a-b)x_2y_1+4ax_2\cdot y_2$$

עבור אילו ערכי a,b מגדירה פונ' זו מ"פ על $\mathbb{R}^2$?

$$\langle(x,y),(x,y)\rangle=axy+(2a+\cancel{b})xy+(2a-\cancel{b})xy+4axy=9axy\geq 0$$

$$\forall(0,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\neq 0\qquad \langle v,v\rangle=0\ \wedge\ v\neq 0$$

$\Leftarrow$ אין מ"פ לכל a,b.