אלגברה לינארית 2 88-113
תרגיל 7 – להגשה בכב' באייר (14.5)

.1

מצאו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של המטריצה הממשית הבאה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. שלשו / לכסנו את המטריצות הבאות (כפי האפשר) :

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.3

יהיו $A,B\in F^{n\times n}$ שתי מטריצות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f_A(x)=f_B(x)$ אזי $m_A(x)=m_B(x)$

ב. אם $m_A(x)=m_B(x)$ אזי $A\sim B$ (משמע, המטריצות דומות)

ג. אם $m_A(x)=m_B(x)$ אזי $f_A(x)=f_B(x)$

.4

א. יהיו $v_1,\dots,v_k$ וקטורים עצמיים השייכים לאותו ערך עצמי λ של T. הוכח כי תת-המרחב $W=Sp\{v_1,\dots,v_k\}$ הוא T-אינווריאנטי.

ב. הסק מסעיף א' כי כל תת-מרחב של תת-המרחב העצמי V_λ הוא T-אינווריאנטי.

ג. יהי W תת-מרחב T-אינווריאנטי כלשהו (לאו דוקא תת-המרחב העצמי של T). האם נכון הוא, כי כל תת-מרחב של W הוא T-אינווריאנטי?

ד. יהי W תת-מרחב T-אינווריאנטי ממימד 1. הוכח כי $W=Sp\{v\}$ כאשר v הוא וקטור עצמי של T.

ה. השתמש בסעיף ד', ומצא את כל תתי-המרחבים האינווריאנטיים של הטרנספורמציה:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.5

תהי $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ טרנספורמציה לינארית המוגדרת ע"י:

$$T(x,y,z,u) = (\tfrac{5}{2}x + y - \tfrac{1}{2}z + u, 3y + u, \tfrac{1}{2}x + y + \tfrac{3}{2}z + u, 3u)$$

א. הראה כי:

$$W_1 = Sp\{v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (1,0,-1,0)\}$$
$$W_2 = Sp\{v_3 = (1,1,1,0), v_4 = (1,1,1,1)\}$$

הם תתי-מרחבים T-אינווריאנטיים.

ב. הוכח כי $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$.

ג. רשום את מטריצות הטרנספורמציות $[T]_{W_1}$ ו- $[T]_{W_2}$ בבסיסים $B_1 = \{v_1, v_2\}$, $B_2 = \{v_3, v_4\}$ בהתאמה.

ד. מצא את $[T]_B$.

בהצלחה!