תרגיל 9

להגשה עד 15.1.18

נסמן:

$L^p(X) := L^p(X,\mathbb{A},\mu)$, באשר $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח.

$l^p := L^p(\mathbb{N},\mathbb{P}(\mathbb{N}),\eta)$, באשר η הינה מידת הספירה.

שאלה 1

תהי $f \in L^1(\mathbb{R},\mathcal{S},m)$. הוכיחו כי: $\lim_{h\to 0}\|f(x)-f(x-h)\|_1 = 0$.

שאלה 2

נניח X מרחב טופולוגי, ו־ $\mathbb{B}(X) \subseteq \mathbb{A}$, ולכל V פתוחה לא ריקה מתקיים $\mu(V) > 0$.

הוכיחו כי אם $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ רציפות כך ש $f=g$ כב"מ־μ אז $f(x)=g(x)$ לכל $x\in X$,

והסיקו מכך כי לכל $f\colon X\to\mathbb{R}$ רציפה מתקיים: $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x\in X\}$.

שאלה 3

1. נניח כי $\mu(X) < \infty$. הוכיחו כי אם $1 \le r < p < \infty$ אזי $L^p(X) \subseteq L^r(X)$ ולכל $f\in L^p(X)$ מתקיים: $\|f\|_r \le \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|f\|_p$.
2. הוכיחו כי אם $r<p$ אזי $l^r \subsetneqq l^p$.

שאלה 4

תהי $(f_n)_\mathbb{N}$ סדרת פונקציות ממשיות מדידות־$\mathbb{A}$ על X המתכנסת כב"מ לפונקציה f.

נניח שעבור $p\in[1,\infty)$ קיימת $g\in L^p(X)$ כך שלכל n: $|f_n|\le g$ (כב"מ). הוכיחו כי $f,\ f_n\in L^p(X)$,

וכן כי $f_n\to f$ ב $(L^p(X),\|\cdot\|_p)$.

שאלה 5

יהי $p\in[1,\infty)$, ותהי $f\in L^p(X)$. הוכיחו כי המידה של הקבוצה: $[f\neq 0]=\{x\mid f(x)\neq 0\}$ הינה σ־ סופית (כלומר, ניתן להציג את הקבוצה כאיחוד בן מניה של קבוצות מדידות ובעלות מידה סופית).

בהנאה ☺