פתרון תרגיל 7 בפונקציות מרוכבות

1. (א) לא נכון. $f(z)=z^4$ היא דוגמא נגדית.

   (ב) על עיגול היחידה $\{z \mid |z|\le 1\}$ אנחנו יודעים ש $f(z)$ חסומה כי היא רציפה. כלומר קיים M כך שלכל z המקיים $|z|\le 1$ מתקיים $|f(z)|\le M$ אבל לכל $z\in\mathbb{C}$ יש n טבעי כך ש $|\frac{z}{3^n}|\le 1$ ואז

$$|f(z)|] = |f(\frac{z}{3})| = |f(\frac{z}{3^2})| = \cdots = |f(\frac{z}{3^n})| \le M$$

   ולכן $f(z)$ חסומה ולכן קבועה.

2. מספיק להוכיח שלכל z_0 מתקיים $f^{n+1}(z_0)=0$. לפי משפט קושי, לכל $R>0$ מתקיים

$$f^{n+1}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}\mathrm{d}z$$

   לפי משפט של חסם לאיטגרל

$$\begin{aligned}|f^{n+1}(z_0)| &= |\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}\mathrm{d}z| \\ &\le \frac{(n+1)!}{2\pi}\frac{M|z|^n}{R^{n+2}}2\pi R \le (n+1)!\frac{M(R+|z_0|)^n}{R^{n+1}}\end{aligned}$$

   אם נשאיף את R לאינסוף , הביטוי הימני ישאף ל 0 ולכן $f^{n+1}(z_0)=0$ כנדרש.

3. נגדיר $g(z)=f(z)-f(2z)$ היא גם פונקציה שלמה אבל היא חסומה ולכן $g(z)$ קבועה. כלומר קיים c כך ש $f(z)-f(2z)=c$. אם נציב $z=0$ נגלה ש $c=0$ ולכן $f(z)=f(2z)$. מכאן מוכיחים ש f קבועה כמו בשאלה 1ב.